Megoldás. Megmutatjuk, hogy L is és M is rajta van az AFB körön. Ehhez elegendő belátnunk, hogy

$$ALB\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 180^\circ - AFB\sphericalangle. \tag{1}$$

Jelöljük az $ABCD$ négyzet oldalának hosszát a-val.

Az elforgatások miatt az ADE és CBG háromszögek olyan egybevágó egyenlőszárú háromszögek, amelyek szárainak hossza a, szárszögük α, s így alapon fekvő szögeik nagysága $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ezért az AFB háromszög A-nál és B-nél lévő külső szögeinek összege

$$(90^\circ + \alpha) + \left(90^\circ + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 270^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

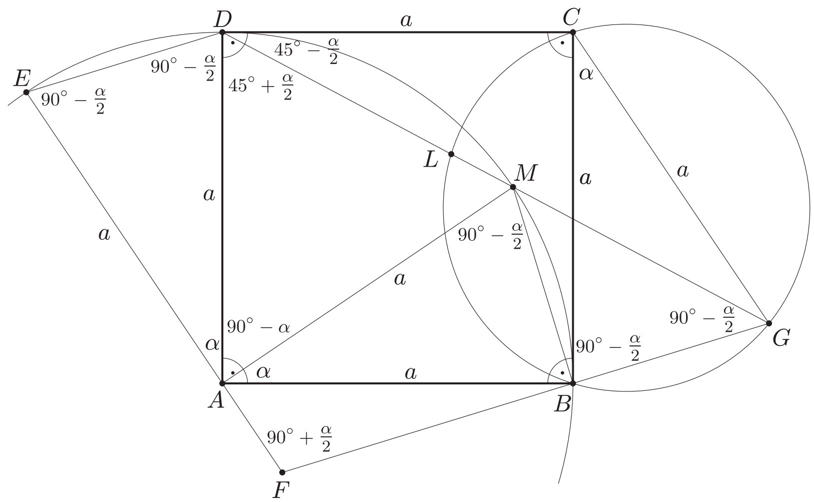
Tudjuk, hogy egy háromszög bármely külső szöge megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével, ezért – felhasználva, hogy a háromszögben a szögek összege 180° – kapjuk, hogy

$$AFB\sphericalangle = \left(270^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - 180^\circ = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $DC = CB = CG = a$ és $DCG\sphericalangle = 90^\circ + \alpha$, a DCG egyenlőszárú háromszögben $CDG\sphericalangle = CGD\sphericalangle = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ebből kapjuk, hogy

$$ADM\sphericalangle = ADC\sphericalangle - CDG\sphericalangle = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $AE = AD = AB = a$, azért a BDE kör középpontja A, és így $AM = AD = a$ is teljesül (*1. ábra*).

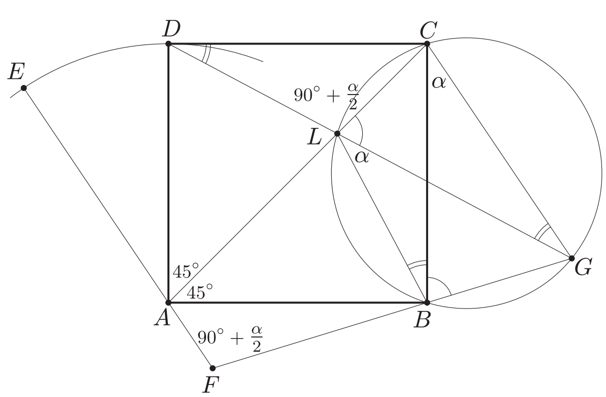


1. ábra

Az ADM és AMB háromszögek tehát egyenlőszárúak, ezért $DAM\sphericalangle = 180^\circ - 2ADM\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, s mivel $MAB\sphericalangle = 90^\circ - DAM\sphericalangle = \alpha$, azért

$$AMB\sphericalangle = \frac{180^\circ - MAB\sphericalangle}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - AFB\sphericalangle.$$

Tehát M rajta van az AFB körön.



2. ábra

Mivel α hegyesszög, a G és L pontok a BC egyenes különböző oldalaira esnek (*2. ábra*). Így a GC húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt $CLG\sphericalangle = CBG\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, amiből kapjuk, hogy $CLD\sphericalangle = 180^\circ - CLG\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. A GB húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt pedig $GLB\sphericalangle = GCB\sphericalangle = \alpha$, ezért

$$CLB\sphericalangle = CLG\sphericalangle + GLB\sphericalangle = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = CLD\sphericalangle.$$

Végül pedig a CL húrhoz tartozó kerületi szögek egyenlősége miatt $LBC\sphericalangle = LGC\sphericalangle = DGC\sphericalangle = GDC\sphericalangle = LDC\sphericalangle$. Tehát az LBC és LDC háromszögek egybevágóak, mert közös az LC oldaluk és két-két megfelelő szögük egyenlő. Ezért $LCB\sphericalangle = LCD\sphericalangle$, vagyis L rajta van az $ABCD$ négyzet AC átlóján. Ezért

$$ALB\sphericalangle = 180^\circ - CLB\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - AFB\sphericalangle,$$

vagyis teljesül rá az (1) egyenlőség.

Ezzel megmutattuk, hogy mind az öt pont egy körön van.