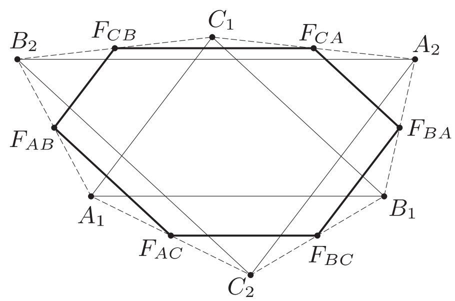
Megoldás. A két háromszög nyilván hasonló. Legyen $A_1B_1 = c_1$, $B_1C_1 = a_1$, $A_2B_2 = c_2$, és a többi oldalt is nevezzük el hasonló módon. Feltehetjük, hogy $T_1 \leq T_2$, azaz $a_1 \leq a_2$, és ismert, hogy

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Legyen A_1B_2 felezőpontja F_{AB}, B_1A_2 felezőpontja F_{BA}, A_1C_2 felezőpontja F_{AC}, és a többit is nevezzük el hasonló módon. Legyen a hatszög területe T.

Első eset: $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ nem egyállásúak (*1. ábra*)



1. ábra

.

A párhuzamos szelőkre vonatkozó tételkörből következik, hogy $F_{AB}F_{AC} = \dfrac{a_2}{2}$, $F_{BA}F_{CA} = \dfrac{a_1}{2}$, $F_{BC}F_{CB} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$, mindhárom párhuzamos B_1C_1-gyel, és hasonló áll fenn a többi oldallal is. A szakaszok irányítását megfigyelve kapjuk, hogy a kapott hatszög oldalai rendre $\frac{a_1}{2}$, $\frac{b_2}{2}$, $\frac{c_1}{2}$, $\frac{a_2}{2}$, $\frac{b_1}{2}$, $\frac{c_2}{2}$.

A megfelelő szögegyezések miatt az $\frac{a_2}{2}$, $\frac{b_2}{2}$ és $\frac{c_2}{2}$ hosszú oldalak meghosszabbításával olyan $\dfrac{2a_1 + a_2}{2}$, $\dfrac{2b_1 + b_2}{2}$, $\dfrac{2c_1 + c_2}{2}$ oldalhosszúságú háromszöget kapunk, aminek a területe $\frac{3}{4}T_1$-gyel nagyobb a hatszögénél, legyen ez T'. A háromszög hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz, az oldalaik aránya

$$\frac{2a_1 + a_2}{2a_1} = 1 + \frac{a_2}{2a_1} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

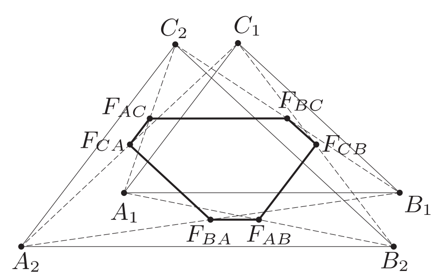
azaz a területük aránya:

$$\frac{T'}{T_1} = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^2 = 1 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + \frac{T_2}{4T_1},$$

amiből $T' = T_1 + \sqrt{T_1T_2} + \dfrac{T_2}{4}$. Ebből $T = \dfrac{T_1 + T_2}{4} + \sqrt{T_1T_2}$.

Második eset: $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ egyállásúak (*2. ábra*).

Ekkor az első esetben látottakhoz hasonlóan megállapítható, hogy $F_{AB}F_{AC} = \dfrac{a_2}{2}$, $F_{BA}F_{CA} = \dfrac{a_1}{2}$, $F_{BC}F_{CB} = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$, mindhárom párhuzamos B_1C_1-gyel, és hasonlóan a többire is. Az irányítások figyelésével most azt kapjuk, hogy a hatszög oldalai rendre $\frac{a_1}{2}$, $\frac{b_2 - b_1}{2}$, $\frac{c_1}{2}$, $\frac{a_2 - a_1}{2}$, $\frac{b_1}{2}$, $\frac{c_2 - c_1}{2}$ hosszúak lesznek.



2. ábra

Az egyező szögek miatt az $\dfrac{a_2 - a_1}{2}$, $\dfrac{b_2 - b_1}{2}$ és $\dfrac{c_2 - c_1}{2}$ hosszú oldalak meghosszabbításával egy olyan T'' területű háromszöget kapunk, melynek oldalai $\dfrac{a_1 + a_2}{2}$, $\dfrac{b_1 + b_2}{2}$, $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$, és $T'' = T + \frac{3}{4}T_1$, és hasonló $A_1B_1C_1$-hez. T'' és T_1 oldalainak aránya:

$$\frac{a_1 + a_2}{2a_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Ebből

$$\frac{T''}{T_1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} + \frac{T_2}{4T_1},$$

amiből

$$T'' = \frac{T_1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{T_1 T_2} + \frac{T_2}{4}, \quad \text{tehát} \quad T = \frac{T_2 - 2T_1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{T_1 T_2}.$$

Ez a kifejezés akkor is megadja a területet, ha $a_1 = a_2$, és a hatszög háromszöggé fajul.