Először $\cos\left(\pi/2^{2011}\right)$ értékét írjuk fel a kívánt módon. Ehhez teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

$$2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

ahol a jobb oldalon összesen n darab négyzetgyökjel van.

Az állítás $n=1$-re igaz, mert $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra helyes a képlet. A kétszeres szögek koszinuszára vonatkozó $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ összefüggésből következik, hogy ha $\cos x$ értéke nem negatív, akkor

$$\cos x=\sqrt{\frac{\cos 2x+1}{2}},\qquad \text{azaz}\qquad 2\cos x=\sqrt{2+2\cos 2x}.$$

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$

értéke bármely $k>0$ egész szám esetén pozitív, az utóbbi formulát alkalmazhatjuk $x=\frac{\pi}{2^{k+1}}$-re. Ebből az indukciós feltevést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^k}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

ahol a jobb oldalon most már összesen k darab négyzetgyökjel áll. Ennek alapján tehát

$$\cos\frac{\pi}{2^{2011}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},$$

ahol a jobb oldalon összesen 2010 darab négyzetgyökjel van.

Mivel $\sin\left(\pi/2^{2011}\right)>0$, a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$\sin\frac{\pi}{2^{2011}}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2^{2011}}}=\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2},$$

ahol a jobb szélen a számlálóban összesen ismét 2010 darab négyzetgyökjel található.

A $\sin\left(\pi/2^{2011}\right)$ értékének ez a felírása megfelel a feltételeknek, mert a képletben csak a 2 számjegy, valamint az alapműveletek és négyzetgyökjelek szerepelnek.