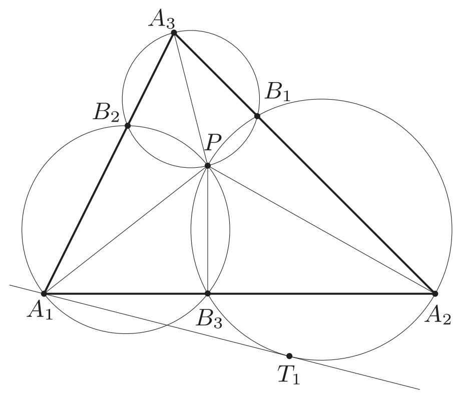
Megoldás. Jelölje a PA_i átmérőjű kört k_i $(i=1,2,3)$. Legyenek a P pontból az A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre B_3, B_1, B_2 az *ábra* szerint.

A megfelelő körök második metszéspontja minden esetben a B_i pont. Igazoljuk ezt például a B_3 pontra: az A_1P és A_2P a k_1, illetve k_2 körök átmérői; B_3 a P-ből állított merőleges talppontja az A_1A_2 oldalon, így mindkét körnek pontja a Thálesz-tétel miatt.



Írjuk fel az A_1 pont k_2 körre vonatkozó hatványát kétféleképpen:

$$A_1T_1^2 = A_1B_3 \cdot A_1A_2.$$

A többi körre is felírva ugyanezt látjuk, hogy

$$A_2T_2^2 = A_2B_1 \cdot A_2A_3,$$
$$A_3T_3^2 = A_3B_2 \cdot A_3A_1.$$

Most írjuk fel a PA_1B_3, a PA_2B_1 és a PA_3B_2 háromszögekre a Pitagorasz-tételt:

$$PA_1^2 = PB_3^2 + A_1B_3^2, \tag{1}$$
$$PA_2^2 = PB_1^2 + A_2B_1^2, \tag{2}$$
$$PA_3^2 = PB_2^2 + A_3B_2^2. \tag{3}$$

Ezután pedig a PB_3A_2 háromszögre írjuk fel a Pitagorasz-tételt, de kicsit másképpen, az előző adatokra támaszkodva:

$$PB_3^2 + (A_1A_2 - A_1B_3)^2 = PA_2^2.$$

Ezt kifejtve látjuk, hogy a kétszeres szorzat a korábbiak alapján $2 \cdot A_1T_1^2$-re cserélhető.

$$PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1A_2 \cdot A_1B_3 + A_1B_3^2 = PA_2^2,$$
$$PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1T_1^2 + A_1B_3^2 = PA_2^2. \tag{4}$$

Ugyanilyen módon kapjuk a PB_1A_3 és PB_2A_1 háromszögekre, hogy

$$PB_1^2 + A_2A_3^2 - 2 \cdot A_2T_2^2 + A_2B_1^2 = PA_3^2, \tag{5}$$
$$PB_2^2 + A_3A_1^2 - 2 \cdot A_3T_3^2 + A_3B_2^2 = PA_1^2. \tag{6}$$

Most adjuk össze az (1)–(6) egyenleteket:

$$\begin{gathered} PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PB_3^2 + A_1A_2^2 - 2 \cdot A_1T_1^2 + A_1B_3^2 + PB_1^2 + \\ + A_2A_3^2 - 2 \cdot A_2T_2^2 + A_2B_1^2 + PB_2^2 + A_3A_1^2 - 2 \cdot A_3T_3^2 + A_3B_2^2 = \\ = PB_3^2 + A_1B_3^2 + PB_1^2 + A_2B_1^2 + PB_2^2 + A_3B_2^2 + PA_2^2 + PA_3^2 + PA_1^2, \end{gathered}$$

majd végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket:

$$A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2 = 2\big(A_1T_1^2 + A_2T_2^2 + A_3T_3^2\big),$$

ezzel éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.