I. megoldás. 1. Az egyenlet mindkét oldalát zárt alakra hozzuk az (*Hermite*-féle)

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left[x+\frac{i}{k}\right]=[kx]$$

azonosság felhasználásával, ahol k pozitív egész, x pedig tetszőleges valós szám. Ezt például a következőképpen láthatjuk be. Mivel minden m egészre és y valós számra $[y+m]=[y]+m$, az azonosságot elég arra az esetre bizonyítani, amikor $0\le x<1$. Ekkor az összeg minden tagjára $0\le\left[x+\frac{i}{k}\right]<2$, így a bal oldal értéke azoknak az i indexeknek a száma, amelyekre ($0\le i\le k-1$ és) $\left[x+\frac{i}{k}\right]=1$, azaz $x+\frac{i}{k}\ge 1$. Az utóbbi egyenlőtlenség átrendezve: $kx\ge k-i$. Ez annyi i-re teljesül, amennyi szám az $1,2,\dots,k$ számok közül nem nagyobb kx-nél, az pedig éppen $[kx]$.

2. Térjünk rá a feladatbeli egyenletre:

$$\sum_{k_1=0}^{a-1}\left[\frac{n+k_1b}{ab}\right]=\sum_{k_2=0}^{b-1}\left[\frac{n+k_2a}{ab}\right],$$

$$\sum_{k_1=0}^{a-1}\left[\frac{n}{ab}+\frac{k_1}{a}\right]=\sum_{k_2=0}^{b-1}\left[\frac{n}{ab}+\frac{k_2}{b}\right].$$

Az Hermite-azonosság felhasználásával:

$$\left[\frac{n}{ab}a\right]=\left[\frac{n}{ab}b\right],\quad \text{azaz}\quad \left[\frac{n}{b}\right]=\left[\frac{n}{a}\right].$$

Mivel a és b szerepe egyenértékű, feltehető, hogy $a\le b$. Ha $a=b$, akkor triviális módon végtelen sok (minden) n-re teljesül az egyenlet. A továbbiakban legyen $a<b$. Mivel $n=0$ nyilván megoldás, az egyenlet pozitív egész megoldásait számoljuk meg. Ilyen biztosan nem létezik, ha $a=1$, ezért feltesszük, hogy $a\ge 2$. Az $n>0$ pontosan akkor megoldás, ha van olyan t (nemnegatív) egész szám, amelyre

$$t\le\frac{n}{b}<\frac{n}{a}<t+1,\quad \text{azaz}\quad tb\le n<at+a.$$

Ilyen n csak akkor létezik, ha $tb\le at+a-1$, vagyis $t\le e:=\left[\frac{a-1}{b-a}\right]$. Minden ilyen t-re a megoldások száma éppen a pozitív egészek száma tb-től $at+a-1$-ig, tehát $t=0$ esetén $a-1$, egyébként pedig $(at+a-1)-(tb-1)=t(a-b)+a$. Tehát $2\le a<b$ esetén a megoldások száma

$$1+(a-1)+\sum_{t=1}^{e}\big(t(a-b)+a\big)=\frac{e+1}{2}\big(2a+e(a-b)\big).$$

II. megoldás. Ezúttal is felteszük, hogy $a<b$. Az egyenlet bal oldalán a tagok száma a, a jobb oldalon pedig b. A bal oldalon az $(a-i)$-edik tag $\left[\frac{n+(a-i)b}{ab}\right]$, ami legfeljebb akkora, mint a jobb oldalon a $(b-i)$-edik tag, $\left[\frac{n+(b-i)a}{ab}\right]$, hiszen $n+(a-i)b\le n+(b-i)a$. Mivel mindkét összeg tagjai nemnegatívak, a bal oldali összeg legfeljebb akkora, mint a jobb oldali. Egyenlőség tehát csak úgy állhat fenn, ha minden $0\le i\le a-1$-re

$$\left[\frac{n+(a-i)b}{ab}\right]=\left[\frac{n+(b-i)a}{ab}\right],$$

a jobb oldali összeg fennmaradó

$$\left[\frac{n+(b-a)a}{ab}\right],\quad \left[\frac{n+(b-a-1)a}{ab}\right],\quad \dots,\quad \left[\frac{n+a}{ab}\right],\quad \left[\frac{n}{ab}\right]$$

tagjainak értéke pedig nulla. Ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy közülük a legnagyobb, $\left[\frac{n+(b-a)a}{ab}\right]$ nulla, azaz $\frac{n+(b-a)a}{ab}<1$, vagyis $n<a^2$. A két összeg tagjai közül a legnagyobb

$$\left[\frac{n+(b-1)a}{ab}\right]\le\frac{n+(b-1)a}{ab}=\frac{n}{ab}+\frac{(b-1)}{b}<\frac{a^2}{ab}+\frac{(b-1)}{b}<2,$$

ezért mindegyik egészrész vagy 1 vagy 0. Így n pontosan akkor megoldás, ha létezik olyan $0\le i\le a-1$, amelyre a bal oldalon az első $a-i-1$ tag nulla, a többi 1, míg a jobb oldalon az első $b-i-1$ tag nulla, a többi pedig 1.

Figyelembe véve a két oldal tagjainak egymáshoz viszonyított nagyságát és azt, hogy mindkét összegben a tagok növekvő sorrendben követik egymást, ez pontosan akkor következik be, ha

$$\frac{n+(a-i)b}{ab} \geq 1 > \frac{n+(b-i-1)a}{ab}, \quad \text{azaz} \quad (i+1)a > n \geq ib.$$

Csak akkor van e feltételt kielégítő n, ha $(i+1)a > ib$, vagyis $i \leq \left[\frac{a-1}{b-a}\right] = e$. Ilyenkor – adott i-re – $(i+1)a-1-(ib-1) = (i+1)a-ib$ darab n felel meg. Tehát az egyenlet nemnegatív egész megoldásainak száma

$$\sum_{i=0}^{e} (i+1)a - ib = \frac{e+1}{2}\big((e+2)a - eb\big).$$