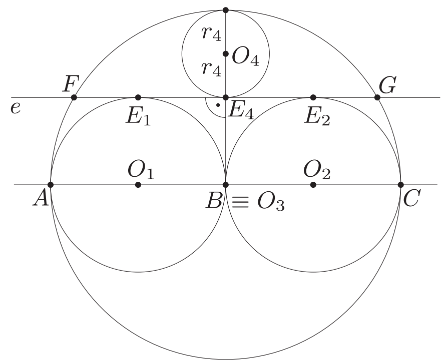
Megoldás. Egy helyesbítéssel kell kezdenünk. A feladat pontatlanul lett kitűzve. Az adott körszeletbe ugyanis végtelen sok különböző érintő kör írható. A megoldás során, mint ahogy azt a legtöbb megoldó is tette, feltételezzük, hogy a lehető legnagyobb ilyen körről van szó, melyet k_4-gyel jelölünk.

Jelölje $i = 1, 2, 3, 4$ esetén a k_i kör középpontját O_i, a szóban forgó közös érintőt e, $i = 1, 2, 4$ esetén E_i pedig azt a pontot, amelyben az e egyenes érinti a k_i kört.

Az e egyenes és a k_3 kör metszéspontjai legyenek F és G. Mivel k_4 a körszeletbe írható legnagyobb sugarú kör, azért E_4 az FG szakasz felezőpontja. Tudjuk, hogy érintkező körök esetén az érintési pont és a két körközéppont kollineáris, továbbá a szimmetria miatt az O_3O_4 egyenes átmegy FG felezőpontján, ezért $O_3E_4 = r_3 - 2r_4$. Mivel $AB + BC = AC$, azért $r_3 = r_1 + r_2$, tehát $O_3E_4 = r_1 + r_2 - 2r_4$, továbbá $O_1O_3 = r_3 - r_1 = r_2$. A k_1 és k_2 körök szerepe felcserélhető, így feltehetjük, hogy $r_1 \le r_2$.

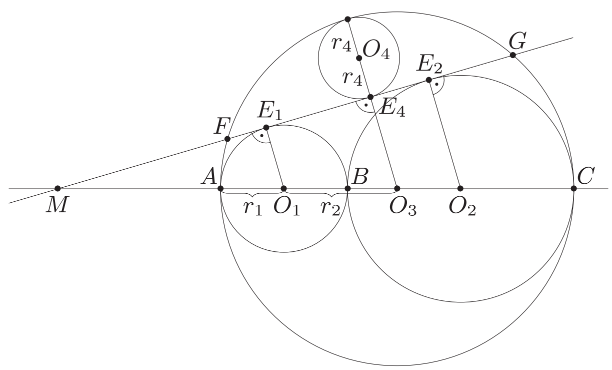


1. ábra

Ha $r_1 = r_2 = \dfrac{r_3}{2}$, akkor az e egyenes párhuzamos az AC szakasszal (*1. ábra*). Ezért ekkor $BE_4 = r_1$, és így

$$r_4 = O_4E_4 = \frac{r_3 - BE_4}{2} = \frac{r_3}{4}, \quad \text{azaz} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{r_3^2}{4} = r_3 \cdot r_4,$$

tehát igaz a feladat állítása.



2. ábra

Ha $r_1 < r_2$, akkor az e egyenes metszi az AC egyenest egy M pontban (*2. ábra*). Legyen $MO_1 = x$. Az O_1E_1, O_2E_2 és O_3E_4 szakaszok merőlegesek az e egyenesre, tehát egymással párhuzamosak. Ezért a párhuzamos szelők tétele szerint $O_1E_1 : O_1M = O_2E_2 : O_2M$ és $O_1E_1 : O_1M = O_3E_4 : O_3M$, azaz

$$\frac{r_1}{x} = \frac{r_2}{x + r_1 + r_2} \quad \text{és} \quad \frac{r_1}{x} = \frac{r_1 + r_2 - 2r_4}{x + r_2}.$$

Az első egyenlőségből kapjuk, hogy

$$x = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2 - r_1},$$

amit a másodikba beírva és rendezve

$$r_4 = \frac{(r_1 + r_2)x - r_1(x + r_2)}{2x} = \frac{r_1 r_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} - r_1 r_2}{2 \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2 - r_1}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r_1 r_2}{r_3},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.