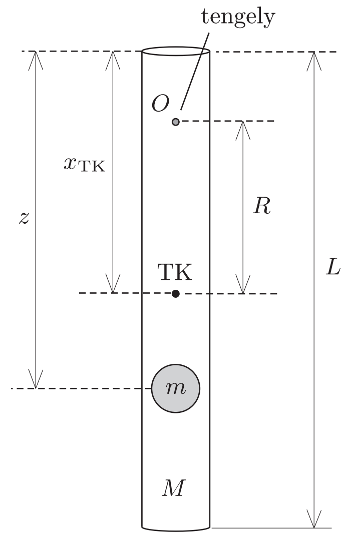
2. feladat. Mechanikai fekete doboz: csőben rögzített golyó



4. ábra

A mechanikai fekete doboz egy zárt alumíniumcsőből és egy, a cső belsejében ismeretlen helyen rögzített golyóból állt. A 30 cm hosszú csövön centiméterenként lyukak (összesen 16 db) voltak fúrva, melyek segítségével a csövet vízszintes tengely körüli lengésbe lehetett hozni. A versenyzőknek roncsolásmentes mérésekkel kellett a rendszer olyan tulajdonságait megállapítani, mint (*i*) a tömegközéppont helye, (*ii*) a cső M és a golyó m tömegének aránya és (*iii*) a golyó csövön belüli helyzete. Ezen kívül meghatározandó volt (*iv*) a nehézségi gyorsulás értéke is.

Konkrét mérési utasításokat ezúttal nem kaptak a versenyzők, csak a felhasználható eszközök jelenthettek támpontot a mérési módszerek kitalálásában: asztalra rögzíthető tengely a rúd lengetéséhez, vonalzó, stopper, ragasztószalag a tengely asztalra rögzítéséhez, illetve egy méternyi fonál.

(*i*) A tömegközéppont $x_{TK} = (mz + ML/2)/(m + M)$ helyét a diákok a legkülönbözőbb módokon határozták meg: többen az asztal szélén egyensúlyozták ki a csövet, mások egy vagy két szál fonállal függesztve fel a rendszert azt használták ki, hogy a tömegközéppont mindig a felfüggesztési pont alatt helyezkedik el.

(*ii–iv*) Nehezebb feladat volt a rúd és a cső tömegarányának, a golyó helyzetének és a g nehézségi gyorsulásnak a meghatározása. A kis lengéseket végző cső fizikai ingának tekinthető, melynek lengésideje (a *4. ábra* jelöléseit használva)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_O}{(M+m)gR}},$$

ahol a Steiner-tétel értelmében $\Theta_O = \Theta_{TK} + (M+m)R^2$. A rendszer tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka pedig (a golyóra a pontszerű közelítést alkalmazva):

$$\Theta_{TK} = m(z - x_{TK})^2 + M\left(x_{TK} - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2.$$

A periódusidő tehát a

$$T(R) = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TK} + (M+m)R^2}{(M+m)gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_{TK}}{(m+M)gR} + \frac{R}{g}}$$

módon függ a felfüggesztési pont tömegközépponttól mért távolságától. Ez a kifejezés kis átalakítással a

$$T^2R = \frac{4\pi^2}{g}R^2 + \frac{4\pi^2\Theta_{TK}}{(m+M)g}$$

alakra hozható. A periódusidőt tehát az R távolság függvényében megmérve, majd T^2R-et R^2 függvényében ábrázolva a mért pontok egy egyenesre illeszkednek, melynek meredekségéből a gravitációs gyorsulást, g-ből és a tengelymetszetből pedig a $\Theta_{TK}/(m+M)$ arányt lehet meghatározni. A tömegközéppontra vonatkozó egyenlet felhasználásával a kérdezett m/M tömegarány és a golyó z helyzete innen már kiszámolható.

Másik lehetséges eljárás kínálkozik a rendszer paramétereinek meghatározására, ha észrevesszük, hogy a kis lengések T periódusideje a felfüggesztési pont R helyzetének függvényében egy minimummal rendelkezik. A $T(R)$ görbe minimumhelyéből és a minimális lengésidőből ugyancsak kiszámolhatóak a kérdéses mennyiségek, de a lapos minimum miatt ez az eljárás pontatlanabb, mint az elsőként ismertetett módszer, ezért ezt az alternatív megoldást a rendezők csak fele pontszámmal „jutalmazták”.