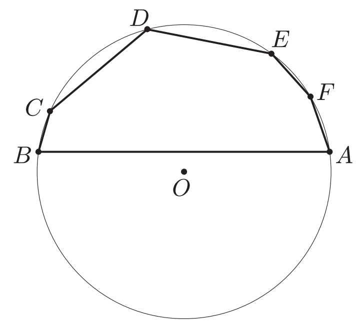
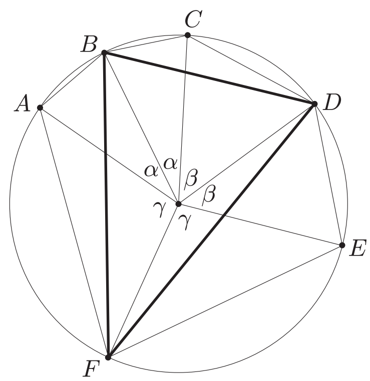
I. megoldás. Legyen a hatszög köré írható k kör középpontja O, sugarának hosszát pedig válasszuk $\sqrt{2}$-nek. Ekkor az ismert területképlet szerint ha P és R tetszőleges pontok k-n, akkor

$$T_{OPR} = \frac{OP \cdot OR}{2} \sin POR\sphericalangle = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \sin POR\sphericalangle = \sin POR\sphericalangle. \tag{1}$$

Az O pont a hatszög belsejében van, ellenkező esetben ugyanis a hatszög valamelyik oldala (feltehetjük, hogy AB) elválasztaná O-t a hatszög többi csúcsától (*1. ábra*). Ebből viszont következne, hogy a hatszög öt másik oldala mind rövidebb lenne, mint AB, vagyis nem teljesülhetne az $AB = BC$ egyenlőség.



1. ábra



2. ábra

Jelölje α, β és γ rendre a k körben az AB, CD és EF húrokhoz tartozó középponti szögeket. Tudjuk, hogy egy körben egyenlő húrokhoz egyenlő középponti szögek tartoznak, ezért a BC, DE és FA húrokhoz tartozó középponti szögek is rendre α, β és γ (*2. ábra*). S mivel O a hatszög belső pontja, azért

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 360°, \quad \text{azaz} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Vagyis az (1) képlet alapján a hatszög területe

$$\begin{aligned} T_{ABCDEF} &= T_{OAB} + T_{OBC} + T_{OCD} + T_{ODE} + T_{OEF} + T_{OFA} = \\ &= 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \end{aligned}$$

A BDF háromszög területe pedig

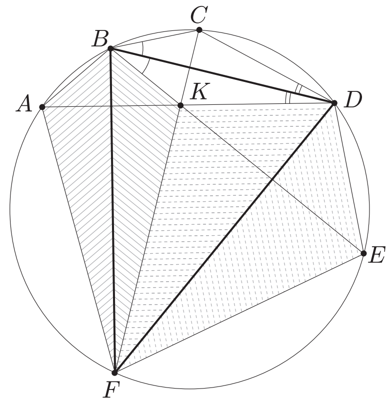
$$T_{BDF} = T_{OBD} + T_{ODF} + T_{OFB} = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha).$$

Viszont $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ miatt a $\sin x = \sin(180° - x)$ összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) = \sin\gamma + \sin\alpha + \sin\beta,$$

tehát $T_{ABCDEF} = 2T_{BDF}$, ami éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Ismert, hogy ha egy hatszög köré kör írható, akkor a hatszög főátlói egy ponton mennek át. Ez *Brianchon* tételének speciális esete, a bizonyítás megtalálható pl. *Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába* című könyvében, a 48.3. részben. Eszerint tehát az AD, BE és CF szakaszoknak van egy közös K pontjuk (*3. ábra*). Ez a pont a BDF háromszög belső pontja, mert a BE, DA és FC szakaszok rendre a DBF, FDB és BFD szögtartományokban vannak, közös pontjuk tehát e három szögtartomány metszetében, azaz a BDF háromszögben helyezkedik el.



3. ábra

Megmutatjuk, hogy a C pont BD egyenesre vonatkozó tükörképe K. Mivel egy körben egyenlő húrokhoz egyenlő kerületi szögek tartoznak, az $AB = BC$ egyenlőségből $ADB\sphericalangle = CDB\sphericalangle$, a $CD = DE$ egyenlőségből pedig $CBD\sphericalangle = EBD\sphericalangle$ következik. Vagyis a tükrözés szögtartása miatt C-nek BD-re vonatkozó tükörképe rajta van a DA és a BE egyeneseken is. E két egyenes egyetlen közös pontja K, tehát csak ez lehet a C pont BD egyenesre vonatkozó tükörképe. Ekkor pedig a BCD és a BKD háromszögek egybevágóak. Ugyanígy láthatjuk be, hogy a DEF háromszög egybevágó a DKF háromszöggel, az FAB pedig az FKB-vel.

Ezek után feladatunk állításának belátása már egyszerű:

$$\begin{aligned}T_{ABCDEF} &= T_{BDF} + T_{BCD} + T_{DEF} + T_{FAB} = \\ &= T_{BDF} + T_{BKD} + T_{DKF} + T_{FKB} = 2T_{BDF}.\end{aligned}$$