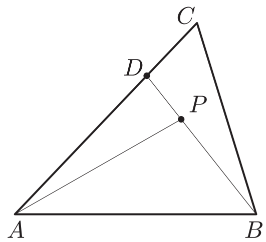
Megmutatjuk, hogy a háromszögre vonatkozó állítás igaz, a tetraéderrel kapcsolatos pedig hamis.

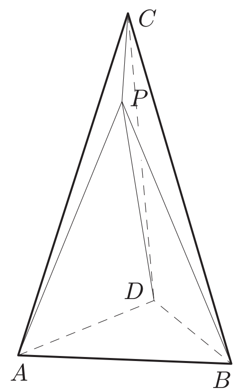
A háromszög esetén legyen a BP és AC egyenesek metszéspontja D. Mivel P a háromszög belső pontja, azért P a BD szakasznak, D pedig az AC szakasznak belső pontja (*1. ábra*). Az ADP és a BDC háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség alapján $AD + DP > PA$ és $DC + CB > DB$. Ezért

$$PA + PB < AD + DP + PB = AD + DB < AD + DC + CB = AC + CB,$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.



1. ábra



2. ábra

Tetraéder esetén elegendő egy ellenpéldát adnunk. Szemléletesen nyilvánvaló, hogy ha olyan tetraédert választunk, melynek három rövid (AB, AD és BD) és három hosszú (a C-ből kiinduló) éle van, P pedig a C csúcshoz közel helyezkedik el, akkor a PA, PB és PC szakaszok közül az első kettő hosszú, a harmadik pedig rövid lesz, míg a DA, DB és DC szakaszok közül az első kettő rövid, a harmadik pedig hosszú lesz (*2. ábra*), ezért a $PA + PB + PC < DA + DB + DC$ egyelőtlenség nem áll fenn.

Precízen koordináták segítségével adhatunk meg egy ilyen ellenpéldát. Tekintsük azt a tetraédert, amelynek csúcsai $A\big(-\sqrt{3}; -1; 0\big)$, $B\big(\sqrt{3}; -1; 0\big)$, $C(0; 0; 11)$ és $D(0; 2; 0)$. Ennek a tetraédernek $P(0; 0; 10)$ nyilván belső pontja. A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$DA + DB + DC = 2\sqrt{12} + \sqrt{125} < 8 + 12 = 20 < 2\sqrt{104} + 1 = PA + PB + PC,$$

vagyis a belső pontnak három csúcstól vett távolságösszege nagyobb, mint a negyedik csúcsnak ugyanattól a három csúcstól vett távolságösszege.