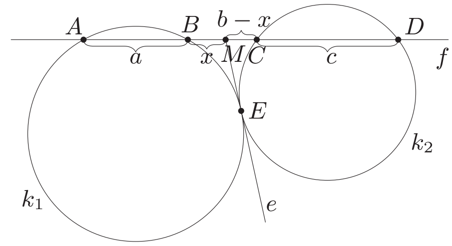
Megoldás. Legyenek k_1 és k_2 egymást az E pontban érintő olyan körök, melyek közül k_1 átmegy az A és B, k_2 pedig a C és D pontokon. Mivel az adott f egyenesnek ekkor a körökkel csak az AB, illetve CD szakaszok a metszetei, a pontok sorrendjéből következik, hogy a két kör kívülről érinti egymást. Ezért az e-vel jelölt E-beli közös érintőjük a BC szakasz belsejében lévő M pontban metszi az f egyenest.



Megmutatjuk, hogy az M pont nem függ a köröktől, az A, B, C és D pontok egyértelműen meghatározzák M helyét, valamint az ME szakasz hosszát. Legyen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ és $BM = x$. Tudjuk, hogy külső pontból egy körhöz húzott két szelőszakasz szorzata megegyezik a pontból a körhöz húzott érintőszakasz hosszának négyzetével. Az M-ből k_1-hez és k_2-höz ugyanaz az ME érintőszakasz húzható, ezért

$$ME^2 = MA \cdot MB = MC \cdot MD,$$

azaz

$$(a+x)x = (b-x)(b+c-x).$$

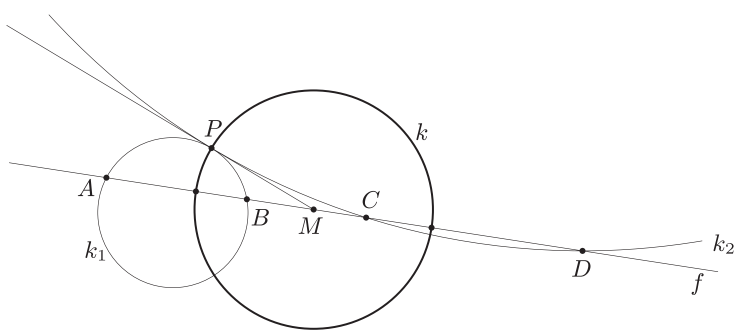
Ebből kapjuk, hogy

$$x = \frac{b^2+bc}{a+2b+c}, \quad \text{és így} \quad \frac{x}{b-x} = \frac{b+c}{a+b},$$

továbbá

$$ME = \sqrt{\frac{b(b+c)(a+b)(a+b+c)}{(a+2b+c)^2}}.$$

Tehát az M pont adott arányban osztja a BC szakaszt, és az ME távolság is állandó. Vagyis E rajta van azon a k körön, amelynek középpontja $\frac{b+c}{a+b}$ arányban osztja BC-t, sugara pedig $r = ME$.



Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely a k kör, kivéve az f egyenessel vett két metszéspontját. Ehhez már csak azt kell belátnunk, hogy ha P a $k \setminus f$ halmaz tetszőleges pontja, akkor léteznek az $\{A, B, P\}$, illetve a $\{C, D, P\}$ ponthármasokon átmenő, egymást P-ben érintő körök. Mivel P nincs rajta az f egyenesen, egyértelműen léteznek az $\{A, B, P\}$, illetve a $\{C, D, P\}$ ponthármasokon átmenő k_1, illetve k_2 körök. Az $MP^2 = MA \cdot MB$ egyenlőségből következik, hogy az MP egyenes P-ben érinti a k_1 kört, az $MP^2 = MC \cdot MD$ egyenlőségből pedig, hogy P-ben érinti a k_2 kört is. Vagyis a két kör P-beli érintőegyenese megegyezik, azaz a két kör érinti egymást P-ben. Ezzel állításunkat beláttuk.

Dinev Georgi