

I. megoldás. Jelöljük a feladatban szereplő egész számot d -vel. A kapott egyenletet gyöktelenítsük; szorozzuk be 2-vel, rendezzük át, majd emeljük négyzetre.

$$\begin{aligned}\frac{4x+1-\sqrt{8x+1}}{2} &= d, \\ 4x+1-\sqrt{8x+1} &= 2d, \\ 4x+1-2d &= \sqrt{8x+1}, \\ 16x^2+1+4d^2+8x-4d-16xd &= 8x+1.\end{aligned}$$

Rendezés és 4-gyel történő egyszerűsítés után $4x^2+d^2-d-4xd=0$. Most mindkét oldalhoz hozzáadva d -t látjuk, hogy a bal oldalon teljes négyzet maradt.

$$\begin{aligned}4x^2+d^2-4xd &= d, \\ (2x-d)^2 &= d.\end{aligned}$$

A teljes négyzet mindkét tagja egész, így tehát d biztosan négyzetszám.

II. megoldás. Adjunk meg úgy egy másodfokú egyenletet, hogy ez a kifejezés legyen az egyik megoldás. Itt az x természetesen már egész paraméter. A másodfokú egyenletben a szokásos jelölések mellett az a -t választhatjuk 1-nek, a b -t pedig $-(4x+1)$ -nek. A diszkrimináns $8x+1$, így a b választása miatt

$$8x+1 = (4x+1)^2 - 4c,$$

ahonnan $c = 4x^2$. A másodfokú egyenlet tehát

$$y^2 - (4x+1)y + 4x^2 = 0.$$

Ebben az egyenletben az x és az y is egész szám. Oldjuk meg most ezt az egyenletet x -re.

$$\begin{aligned}4x^2 - 4yx + y^2 - y &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 16y^2 + 16y}}{8} = \frac{y}{2} \pm \frac{\sqrt{y}}{2}.\end{aligned}$$

Így $2x = y \pm \sqrt{y}$, ahol $2x$ és y egészek, tehát \sqrt{y} is egész. Ekkor viszont a négyzete, y valóban négyzetszám.