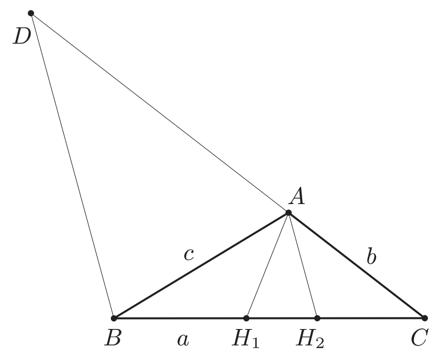
Vegyük fel az A csúcsból kiinduló szögharmadolókat, metszéspontjuk az a oldallal legyen H_1 és H_2. Vizsgáljuk először az ACH_2 háromszöget. Szögei γ, $\dfrac{\alpha}{3}$ és $180^\circ - \dfrac{\alpha}{3} - \gamma$. A szinusztétel alapján:

$$\frac{b}{CH_2} = \frac{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{3} - \gamma\right)}{\sin\frac{\alpha}{3}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\gamma\right)}{\sin\frac{\alpha}{3}}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{b}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\gamma\right)} = \frac{CH_2}{\sin\frac{\alpha}{3}}.$$

Hasonlóan az ABH_1 háromszögből kapjuk, hogy

$$\frac{c}{BH_1} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\beta\right)}{\sin\frac{\alpha}{3}} \implies \frac{c}{\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\beta\right)} = \frac{BH_1}{\sin\frac{\alpha}{3}}.$$



Ezeket a feladatban szereplő egyenlőtlenségbe helyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{CH_2}{\sin\frac{\alpha}{3}} + \frac{BH_1}{\sin\frac{\alpha}{3}} > \frac{2a}{3\sin\frac{\alpha}{3}},$$

illetve egyszerűsítve:

$$CH_2 + BH_1 > \frac{2}{3}a. \tag{1}$$

Ha ezt belátjuk, beláttuk az állítást.

Húzzunk párhuzamost a B ponton keresztül AH_2-vel, ennek AB-vel való metszéspontja legyen D. Az ABD háromszög szögei ekkor $\dfrac{\alpha}{3}$, $\dfrac{2\alpha}{3}$, $180^\circ - \alpha$. A szinusztétel alapján:

$$\frac{AD}{c} = \frac{\sin\frac{2\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3}} = 2\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Tehát $AD = c\cdot 2\cos\dfrac{\alpha}{3}$. A párhuzamos szelők tétele alapján:

$$\frac{CH_2}{a} = \frac{b}{b+AD} = \frac{b}{b+c\cdot 2\cos\frac{\alpha}{3}} \Rightarrow CH_2 = \frac{ab}{b+c\cdot 2\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Hasonló módon beláthatjuk, hogy

$$BH_1 = \frac{ac}{c+b\cdot 2\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Ezek alapján:

$$CH_2 + BH_1 = \frac{ab}{b+c\cdot 2\cos\frac{\alpha}{3}} + \frac{ac}{c+b\cdot 2\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Mivel $\cos\dfrac{\alpha}{3} < 1$, a nevezőket növelve:

$$CH_2 + BH_1 > \frac{ab}{b+c\cdot 2} + \frac{ac}{c+b\cdot 2} = a\cdot\left(\frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2b}\right).$$

Tehát (1)-hez elegendő belátni, hogy $\dfrac{b}{b+2c} + \dfrac{c}{c+2b} \geq \dfrac{2}{3}$. Közös nevezőre hozva:

$$\frac{bc+2b^2+bc+2c^2}{bc+2b^2+2c^2+4bc} = \frac{2b^2+2bc+2c^2}{2b^2+5bc+2c^2} \geq \frac{2}{3}.$$

Minden érték pozitív, így átszorozva

$$\begin{aligned} 6b^2 + 6bc + 6c^2 &\ge 4b^2 + 10bc + 4c^2, \quad \text{azaz} \\ 2b^2 - 4bc + 2c^2 &\ge 0, \\ 2(b-c)^2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Tehát az állítás igaz.