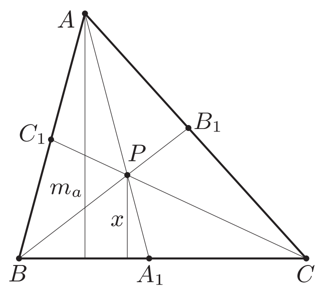
Jelöljük a háromszög magasságait a szokásos módon m_a, m_b, m_c-vel, legyen továbbá a P pontnak az oldalegyenesektől való távolsága rendre x, y és z. Mivel P a háromszög belső pontja,

$$T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP}.$$



1. ábra

Ebből, felhasználva, hogy közös alapú háromszögek területének aránya megegyezik magasságaik arányával, az

(1) $$1 = \frac{T_{BCP}}{T_{ABC}} + \frac{T_{CAP}}{T_{ABC}} + \frac{T_{ABP}}{T_{ABC}} = \frac{x}{m_a} + \frac{y}{m_b} + \frac{z}{m_c}.$$

összefüggés adódik.

A párhuzamos szelők tétele szerint viszont:

$$\frac{x}{m_a} = \frac{PA_1}{AA_1} = \frac{PA_1}{AP + PA_1} = \frac{3}{AP+3},$$

és ugyanígy

$$\frac{y}{m_b} = \frac{3}{BP+3}, \qquad \frac{z}{m_c} = \frac{3}{CP+3}.$$

Ezeket beírva az (1) egyenletbe majd rendezve kapjuk, hogy

$$1 = \frac{3}{AP+3} + \frac{3}{BP+3} + \frac{3}{CP+3},$$

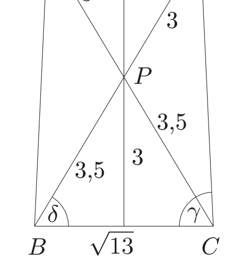
$$(AP+3)(BP+3)(CP+3) =$$
$$= 3\big((BP+3)(CP+3) + (AP+3)(CP+3) + (AP+3)(BP+3)\big).$$

Ebből pedig

$$\begin{aligned}
&AP \cdot BP \cdot CP = \\
&= 3\big((AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot AP) + 6(AP + BP + CP) + 27\big) - \\
&\quad - \big(3(AP \cdot BP + BP \cdot CP + CP \cdot AP) + 9(AP + BP + CP) + 27\big) = \\
&= 9(AP + BP + CP) + 54 = 9 \cdot 43 + 54 = 441,
\end{aligned}$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Megjegyzés. A feladat megoldásából nem következik, hogy létezik olyan háromszög és a belsejében olyan P pont, melyre teljesülnek a feltételek. Ha megpróbálunk ilyet rajzolni, észrevehető, hogy a P pont mindhárom oldalhoz aránylag „közel” kell, hogy legyen. A legegyszerűbb példa az az egyenlőszárú háromszög, amelynek alapja $BC = \sqrt{13}$, alaphoz tartozó magassága 39, a P pont pedig ezen a magasságon van. Ekkor $AP = 36$ és $BP = CP = 3{,}5$. A *2. ábrán* ennek a háromszögnek az alaphoz közeli része látható.



2. ábra

Az ábrán jelölt szögek

$$\gamma = \operatorname{arctg} 6\sqrt{13} \approx 87{,}35^\circ \quad \text{és} \quad \delta = \operatorname{arctg} \frac{6}{\sqrt{13}} \approx 59{,}00^\circ.$$