

Az állítás ekvivalens a következő abszolútértékes egyenlőtlenséggel:

$$\left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Az abszolútérték tulajdonságai alapján

$$\left| \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| = \frac{|(x+y)(1-xy)|}{|(1+x^2)(1+y^2)|} = \frac{|x+y||1-xy|}{|1+x^2||1+y^2|}.$$

Most alkalmazzuk a számlálóban a szorzatra az ismert $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ becslést. (Ezt tekinthetjük a mértani- és négyzetes közép közötti egyenlőtlenségnek, illetve az $(a-b)^2 \geq 0$ egyenlőtlenség átrendezésének is.) Emellett végezzük el a beszorzást a nevezőben:

$$\frac{|x+y||1-xy|}{|1+x^2||1+y^2|} \leq \frac{\frac{(x+y)^2+(1-xy)^2}{2}}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2+1-2xy+x^2y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

Az állítás első lépésben kapott ekvivalens alakját ezzel bizonyítottuk. Meg kell még vizsgálnunk az egyenlőség esetét. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a tagok a mértani-négyzetes becslésnél megegyeznek. Azaz, ha $|x+y| = |1-xy|$. Ez ebben a formában még nem ad választ, hogy mekkora is x és y az egyenlőség esetén. Alkalmazzuk az $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $\alpha, \beta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ helyettesítést. Ha $x \cdot y = 1$, akkor a bal oldalon 2, a jobb oldalon 0 adódik, nem kapunk megoldást. Ha $x \cdot y \neq 1$, kapjuk, hogy

$$1 = \frac{|x+y|}{|1-xy|} = \frac{|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta|}{|1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta|} = |\operatorname{tg}(\alpha + \beta)|.$$

Ennek megoldásai $\alpha + \beta \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$. Itt az a nem szokványos helyzet áll elő, hogy minden x értékhez két olyan y is tartozik, amelyre egyenlőség teljesül. Például $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ és $\beta = \frac{\pi}{12}$ vagy $\beta = -\frac{5\pi}{12}$. Mindkét β érték a $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ intervallumba esik.

Megjegyzések. 1. Egy addíciós tételre felhasználó, áttekinthető, rövid megoldást kapunk, ha mindjárt a megoldás kezdetén alkalmazzuk az $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$ helyettesítést. Itt természetesebben adódik az igény az egyenlőség lehetőségeinek vizsgálatára.

2. Jellemző hiba volt, hogy a versenyzők nem vizsgálták az egyenlőség esetét, emiatt nagyon magas a 3 pontos dolgozatok száma.