Legyen a három pozitív egész szám a, b, c, amelyekre $a+b+c=2010$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{58}$. A második egyenletet a nevezők szorzatával beszorozva és rendezve $58(ab+bc+ca)-abc=0$. Definiáljuk a

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$$

polinomot. Ennek az $x=58$ helyen felvett helyettesítési értéke – felhasználva a feladat feltételeit –

$$P(58)=58^3-58^2(a+b+c)+58(ab+bc+ca)-abc=58^3-2010\cdot 58^2=-6\,566\,528.$$

Másrészt

$$P(58)=(58-a)(58-b)(58-c).$$

Legyen most $p=a-58$, $q=b-58$, $r=c-58$. Ezekre teljesül az eddigiek alapján, hogy

$$pqr=6\,566\,528=2^7\cdot 29^2\cdot 61 \quad \text{és} \quad p+q+r=a+b+c-3\cdot 58=1836.$$

Tudjuk azt is, hogy a p, q, r is pozitív egészek, mivel az a, b, c egészek reciprokai mind kisebbek $\frac{1}{58}$-nál. Vizsgáljunk a továbbiakban két esetet aszerint, hogy a p, q, r számok közül hány osztható 29-cel.

1. Először legyen p osztható 29^2-nel, továbbá q és r egyike sem legyen osztható 29-cel. Az összeg nagysága alapján csak két lehetőséget kell vizsgálnunk: $p=29^2=841$ vagy $p=2\cdot 29^2=1682$. Ha $p=841$, akkor $q+r=995$, ennek megfelelően q és r közül az egyik csak páratlan lehet, azaz 1 vagy 61. Akármelyiket is tekintjük, a másik szám nem lesz 2-hatvány. Ha $p=1682$, akkor $q+r=154$, $q\cdot r=2^6\cdot 61$. Ennek szimmetrikus megoldása $q=122$, $r=32$. Az eredeti számok tehát ebben az esetben 1740, 180 és 90.

2. Hiányzik még annak az esetnek a vizsgálata, ha p és q osztható 29-cel, az r pedig nem. Ha p osztható 61-gyel, akkor $p=1769$, $q+r=67$, $q\cdot r=2^7\cdot 29$, nincs megoldás. Ugyanez a helyzet, ha q osztható 61-gyel. Ha 61 az r-nek osztója, akkor az r csak $r=2^k\cdot 61$ alakú lehet, ahol $0\le k\le 4$. (Ugyanis $2^5\cdot 61$ már nagyobb, mint 1836.) A $p+q+r=1836$-ról tudjuk, hogy 29-cel osztva 9 maradékot ad. Ezt a $2^k\cdot 61$-ek közül egyik sem teljesíti (3, 6, 12, 24, 19 rendre a maradékok), tehát ebben az esetben sincs megoldás.

A keresett három szám: 1740, 180, 90, amelyekre valóban

$$\frac{1}{1740}+\frac{1}{180}+\frac{1}{90}=\frac{1}{58}.$$