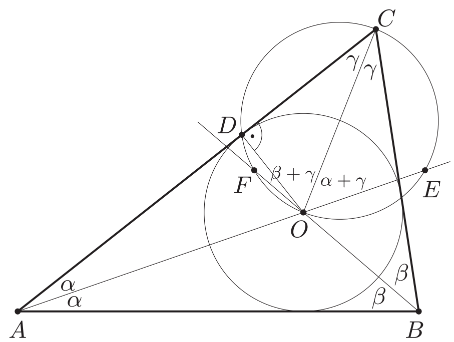
I. megoldás. A szögfelezők a háromszögbe írható kör O középpontjában metszik egymást. A D, E és F pontok mindegyikéből a CO szakasz derékszögben látszik, tehát ezek a pontok mind rajta vannak a CO szakasz k Thalész-körén.



1. ábra

Az ABC háromszög szögeit jelölje 2α, 2β és 2γ (*1. ábra*). Ekkor felhasználva, hogy bármely háromszög külső szöge megegyezik a nem mellette lévő két belső szög összegével kapjuk, hogy

$$EOC\sphericalangle = \alpha+\gamma \quad \text{és} \quad FOC\sphericalangle = \beta+\gamma.$$

Mivel $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$, ebből

$$EOF\sphericalangle = (\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma) = 90^\circ+\gamma$$

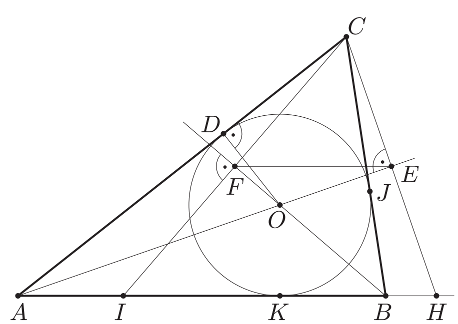
következik. Tehát a k körben az EF húrhoz tartozó egyik kerületi szög $90^\circ+\gamma$, így a hozzá tartozó másik kerületi szög $180^\circ-(90^\circ+\gamma) = 90^\circ-\gamma$.

A COD háromszög D-nél lévő szöge derékszög, ezért

$$COD\sphericalangle = 90^\circ - DCO\sphericalangle = 90^\circ-\gamma.$$

Tehát a k körben a CD és EF húrhoz egyaránt $90^\circ-\gamma$ nagyságú kerületi szög tartozik, ezért a két húr ugyanolyan hosszú.

II. megoldás. Legyen a beírt körnek az AB, illetve BC oldalon lévő érintési pontja K, illetve J, jelölje továbbá a CE és CF egyenesek AB egyenessel való metszéspontját H és I (*2. ábra*), az ABC háromszög oldalainak a hosszát pedig a, b és c.



2. ábra

A HCA háromszögben az A csúcshoz tartozó AE belső szögfelező merőleges a HC oldalra, ezért a háromszög egyenlőszárú, $HA = AC = b$. Ezért AE felezi a háromszög alapját, tehát $HE = EC$. Ugyanígy kapjuk, hogy az IBC háromszög is egyenlőszárú, $IB = BC = a$ és $IF = FC$. A HIC háromszögben tehát EF középvonal, aminek hossza a megfelelő oldal hosszának fele, azaz $EF = HI/2$. Mivel $HI = HA+BI-AB = b+a-c$, azért $EF = (a+b-c)/2$.

Tudjuk, hogy egy körhöz bármely külső pontból két egyenlő hosszúságú érintőszakasz húzható, ezért $AD = AK$, $CD = CJ$ és $BK = BJ$. Így

$$\begin{aligned} CD &= AC-AD = AC-AK = AC-(AB-BK) = AC-AB+BJ = \\ &= AC-AB+(BC-CJ) = b-c+a-CD, \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy $CD = (a+b-c)/2$.

Tehát $CD = EF$, ami épp a bizonyítandó állítás.