

**Megoldás.** Legyen  $r = \frac{p}{q}$  racionális szám, ahol  $p$  és  $q$  egymáshoz relatív prímelek.

Ekkor a feladat szerint

$$r^r = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}$$

is racionális szám, ahol  $a$  és  $b$  szintén relatív prímelek. Rendezéssel:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^q, \quad p^p b^q = a^q q^p.$$

Ám ez  $a$  és  $b$ , valamint  $p$  és  $q$  relatív-prím tulajdonsága miatt csak  $p^p = a^q$  és  $b^q = q^p$  mellett teljesülhet. Az utóbbi szerint  $q^p$ -ben minden kitevő osztható  $q$ -val, de akkor ugyanez  $q$ -ra is fennáll:  $q = c^q$ , alkalmas  $c$  pozitív egésszel. Ha itt  $c > 1$ , akkor  $q = c^q \geq 2^q > q$ , ami ellentmondás; tehát  $c = 1$ , ezért  $q = 1$ , azaz  $r = \frac{p}{q}$  valóban egész szám.