

Dankovics Attila megoldása. 1. lemma. *a) A folyamatban megmarad az adott oldalon lévő pontok száma két olyan állapot közt, amikor csak egy pont van az egyenesen.*

Bizonyítás. A régi forgástengely a forgó egyenesnek ugyanarra az oldalára kerül, mint amelyik oldalán az új forgástengely volt.

b) Az 1. lemma hasonlóan belátható két olyan állapotra, amikor két pont van az egyenesen.

2. lemma. *Minden ponton megy át olyan egyenes aminek két oldalán ugyanannyi pont van.*

Bizonyítás. Veszünk egy egyenest át a ponton, és kitüntetjük az egyik oldalát. Legyen a kitüntetett oldalon k -val több pont (feltehetjük, hogy k pozitív, illetve ha 0, akkor készen vagyunk). Megforgatjuk az egyenest 180 ponttal, ekkor a kitüntetett oldalon k -val kevesebb pont lesz. Mivel nincs 3 pont egy egyenesen, a két oldalon lévő pontok különbsége forgatás közben egyszerre legfeljebb 1-gyel változik. Mivel pozitívból negatívba megy, közben valamikor 0 lesz.

Megoldás. Páratlan sok pont esetén tetszőleges kiindulópontból megfelelő szélalmot eredményez minden olyan ℓ egyenes, amelynek két oldalán ugyanannyi pont van. Ha a pontok száma páros, akkor (egy ilyen egyenest egészen kicsit elforgatva) válasszuk meg ℓ -et úgy, hogy az előbbi feltétel az első találkozáskor teljesüljön.

Bizonyítás. Az egyenes iránya körbe fog forogni, eközben az első lemma alapján a két oldalán lévő pontok számának különbsége végig 0 vagy 1. Egy teljes körbefordulás során egy tetszőleges P ponton biztosan átmegy akkor, amikor éppen olyan irányú, hogy a P -re illeszkedő ilyen irányú f egyenesnek ugyanannyi pont van mindkét oldalán. (Ilyen egyenes a 2. lemma szerint valóban létezik.)

Tegyük fel ugyanis, hogy az e egyenesünk ilyen irányú, de nem megy át P -n – ugyanakkor tartalmazza a halmaz egy Q pontját. Az f -et nemnulla eltolás viszi e -be, melynek eredményeként eltávolodik P -től, és rákerül a Q . Így az e P -t tartalmazó oldalán legalább kettővel több pont lenne, mint a másikon, ami ellentmondás.

Ezzel a feladatot megoldottuk.