Megoldás. Megmutatjuk, hogy ha m páratlan és k pozitív egész szám, akkor $3^{2^k m}-1$ a 2-nek pontosan a $k+2$-edik hatványával osztható. Ha $k=1$, akkor

$$3^{2m}-1=9^m-1=(8+1)^m-1=$$
$$=\left(8^m+\binom{m}{1}8^{m-1}+\ldots+\binom{m}{m-2}8^2+\binom{m}{m-1}8+1\right)-1=8^2v+8m,$$

ami valóban 2-nek pontosan a harmadik hatványával osztható. Ezután a k szerinti indukcióval bizonyíthatunk: ha $k\ge 1$ és $3^{2^k m}-1=2^{k+2}\cdot(2w+1)$ alakú, akkor

$$\begin{aligned}3^{2^{k+1}m}-1&=\big(3^{2^k m}-1\big)\cdot\big(3^{2^k m}+1\big)=2^{k+2}(2w+1)\cdot\big(2^{k+2}(2w+1)+2\big)=\\&=2^{k+2}(2w+1)\cdot 2\big(2^{k+1}(2w+1)+1\big),\end{aligned}$$

ami 2-nek pontosan a $k+3$-adik hatványával osztható.

A bizonyítottak szerint $3^{2n}-1$ akkor és csak akkor osztható 2^{2010}-nel, ha $2n$ osztható 2^{2008}-nal, azaz n osztható 2^{2007}-nel. A legkisebb ilyen pozitív egész tehát $n=2^{2007}$.