

I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy egy szabályos ötszög síkjának minden pontjára az ötszög oldalegyenseitől való távolságok előjeles összege állandó. (A távolságot egy oldaltól pozitívnak tekintjük, amennyiben a pont az oldalegyenesnek az ötszöggel megegyező oldalára esik, és negatívnak ellenkező esetben.) Jelölje egy tetszőleges pont oldalegyenesektől mért távolságát d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , az ötszög oldalhosszát pedig a . Ha a pontot összekötjük az ötszög csúcsaival, akkor öt olyan (esetleg elfajuló) háromszöget kapunk, amelyek előjeles területének összege megegyezik az ötszög területével. Az utóbbi állandó, ezért az előbbi:

$$\frac{ad_1}{2} + \frac{ad_2}{2} + \frac{ad_3}{2} + \frac{ad_4}{2} + \frac{ad_5}{2} = \frac{a}{2} \cdot (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)$$

is az, ami igazolja állításunkat.

Legyen a feladatban vizsgált ötszög $ABCDE$. Tekintsük azt a \mathcal{K} szabályos ötszöget, amelynek oldalfelezőpontjai éppen A, B, C, D, E , valamint legyen P egy tetszőleges pont. Jelölje a P pont távolságát \mathcal{K} oldalegyenseitől d_A, d_B, d_C, d_D, d_E . Az A, B, C, D, E pontok ezeken az oldalegyeneseken helyezkednek el, ezért

$$d_A + d_B + d_C + d_D + d_E \leq PA + PB + PC + PD + PE.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő összeg a fentiek értelmében állandó. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a P pontból \mathcal{K} oldalegyenseire állított merőlegesek talppontjai éppen az A, B, C, D, E pontok, ez pedig csak az $ABCDE$ ötszög középpontjára teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy a távolságok összege az ötszög középpontjára lesz minimális.

Kabos Eszter
dolgozata alapján

II. megoldás. Az ötszög középpontját jelölje O , csúcsait pozitív körüljárás szerint A, B, C, D, E , továbbá legyen r az ötszög köre írható kör sugara. Legyen P egy tetszőleges pont. A $P = P_0$ pontot O körül rendre $k \cdot 72^\circ$ nagyságú szöggel elforgatva képezzük a P_k pontokat ($1 \leq k \leq 4$); ezek P_0 -lal együtt egy szabályos ötszög csúcsait alkotják. A forgatások miatt $BP_0 = AP_4, CP_0 = AP_3, DP_0 = AP_2, EP_0 = AP_1$, így

$$AP + BP + CP + DP + EP = AP_0 + AP_1 + AP_2 + AP_3 + AP_4.$$

Az A pontból a $P_0P_1P_2P_3P_4$ szabályos ötszög csúcsaiba mutató vektorok összege $\sum_{k=0}^4 \overrightarrow{AP_k} = 5\overrightarrow{AO}$. Így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$5r = 5|\overrightarrow{AO}| \leq \sum_{k=0}^4 |\overrightarrow{AP_k}| = PA + PB + PC + PD + PE,$$

azaz a P pontnak az ötszög csúcsaitól való távolságainak összege legalább $5r$, egyenlőség pedig pontosan akkor teljesül, ha $P = O$. Tehát a keresett pont az ötszög középpontja.

Hegedűs Csaba
dolgozata alapján