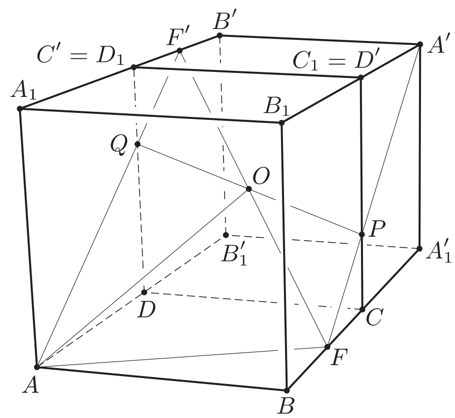
**Megoldás.** Keressük meg azokat a pontokat, ahol az $AOF$ háromszög síkja metszi a $CC_1$, illetve $DD_1$ élt. Tükrözzük a kockát az $O$ lapközéppontra. A kocka középpontos szimmetriája miatt a $C$ pont $C'$ tükörképe a $D_1$ csúcsba kerül, a $D$ pont $D'$ tükörképe a $C_1$ csúcsba. Az $F$ pont tükörképe, $F'$ a $D_1B'$ él felezőpontja lesz.




Jelölje $P$ azt a pontot, ahol az $AOF$ háromszög $\mathcal{S}$ síkja metszi a kocka $C_1C$ élét, $Q$ pedig azt a pontot, ahol az $\mathcal{S}$ sík a $D_1D$ élt metszi. A tükrözés miatt $A'$ és $F'$ benne van az $\mathcal{S}$ síkban, s ezért az $FA'$ és $AF'$ szakaszok is az $\mathcal{S}$ síkban vannak, s velük együtt a $P$ és $Q$ pontok is.

Az $FCP$ és $FA_1'A'$ derékszögű háromszögek hasonlók. $FC = \frac{1}{2}$, $FA_1' = \frac{3}{2}$ és $A_1'A' = 1$. A megfelelő oldalak arányából:

$$CP : 1 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2}, \quad \text{és innen} \quad CP = \frac{1}{3}.$$

Az $F'D_1Q$ és $F'A_1A$ hasonló háromszögekből:

$$QD_1 : AA_1 = D_1F' : A_1F', \quad \text{ahol} \quad AA_1 = 1, \quad D_1F' = \frac{1}{2}, \quad A_1F' = \frac{3}{2}.$$

Írjuk be a megfelelő értékeket az aránypárba:

$$QD_1 : 1 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2}, \quad \text{és innen} \quad QD_1 = \frac{1}{3}.$$

$P$ és $Q$ ugyanolyan arányban osztja a $CC_1$, illetve $DD_1$ párhuzamos szakaszokat, ami azt jelenti, hogy $P$ és $Q$ egymás tükörképei az $O$ pontra, vagyis $P$, $O$ és $Q$ egy egyenesen vannak.

Azt állítjuk, hogy az $\mathcal{S}$ sík a kockát két testre vágja szét, amelyek közül az $A$, $F$, $C$, $P$, $Q$, $D$ pontok egy csonkagúlát határoznak meg. Az $AQD$ és $FPC$ hasonló, egyállású, derékszögű háromszögek síkja egymással párhuzamos (hiszen a kocka két szemközti lapjáról van szó). Mindkét sík merőleges a $DC$ egységnyi hosszúságú szakaszra. E két háromszög lesz a csonkagúla alap- és fedőlapja.

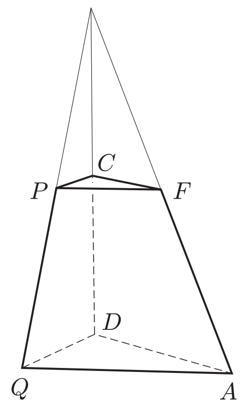
A háromszögek hasonlóságából következik, hogy az $AF$, $DC$ és $QP$ egyenesek egy pontban metszik egymást. A csonkagúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\left(T + \sqrt{Tt} + t\right),$$

ahol $m$ a magasság, $T$ és $t$ az alap- és fedőlap területe. Most

$$m = 1, \quad T = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{12} \quad \text{és}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12}} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{36}.$$




A másik test térfogata a kocka térfogatának és a most kapott csonkagúla térfogatának különbsége:

$$V_2 = 1^3 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}.$$

A két térfogat aránya: $\frac{7}{36} : \frac{29}{36} = 7 : 29.$