I. megoldás. Tegyük fel, hogy az x, y egész számok kielégítik az egyenletet. A két szám bármely közös osztója osztja az $x^2y^2 - x^3 - y^3 = 1$ számot, vagyis x és y relatív prímek. Szimmetria okok miatt elegendő az $x \ge y$ esettel foglalkozni. Ha $x < 0$ lenne, akkor az eredeti egyenlet bal oldalán negatív, a jobb oldalán pozitív szám állna. Ha $x = 0$, akkor $y^3 + 1 = 0$, $y = -1$. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $x > 0$.

Rendezzük át az egyenletet, és mindkét oldalt alakítsuk szorzattá:

$$x^3 + 1 = x^2y^2 - y^3,$$

$$(x+1)\big(x^2 - x + 1\big) = y^2\big(x^2 - y\big).$$

1. Vizsgáljuk meg először az $y \ge 0$ esetet. Ekkor $x - 1 \ge y \ge 0$, ugyanis x, y relatív prímek lévén, $x = y$ esetén $x = y = 1$ következne, ami nem ad megoldást. Tehát $x^2 - y \ge x^2 - x + 1 > 0$, vagyis szükégképpen $y^2 \le x + 1$. Ha $y^2 \le x$ lenne, abból

$$y^2\big(x^2 - y\big) \le x^3 < x^3 + 1 = (x+1)\big(x^2 - x + 1\big)$$

következne, vagyis $y^2 = x + 1$, és ennek megfelelően $x^2 - y = x^2 - x + 1$, tehát $y = x - 1$. Innen $(x-1)^2 = x + 1$, $x^2 - 3x = 0$, vagyis $x = 3$ következik. Az y értékére pedig 2 adódik.

2. Térjünk át az $y < 0$ eset vizsgálatára. Az x pozitív, így $y < x - 1$, azaz $-y > -x + 1$, vagyis

$$x^2 - y > x^2 - x + 1 > 0.$$

Ezért most az egyenlet szorzattá alakítása alapján $y^2 < x + 1$, vagyis $y^2 \le x$. Ha $y^2 \le x - 1$ lenne, akkor $-y \le y^2$ figyelembevételével

$$y^2\big(x^2 - y\big) \le (x-1)\big(x^2 + y^2\big) \le (x-1)\big(x^2 + x - 1\big) =$$

$$= x^3 - 2x + 1 < x^3 + 1 = (x+1)\big(x^2 - x + 1\big)$$

lenne, ami nem lehetséges. Tehát $y^2 = x$ kell, hogy legyen. Minthogy x, y relatív prímek, ez csak $x = 1$, $y = -1$ esetén lehetséges.

Az $x \le y$ feltételt kielégítő megoldásokat x és y szerepének felcserélésével kaphatjuk meg. Ennek alapján a lehetséges $(x; y)$ megoldáspárok: $(0; -1), (3; 2)$, $(1; -1)$, $(-1; 0)$, $(2; 3)$ és $(-1; 1)$. Ezek mindegyike valóban megoldása az egyenletnek.

II. megoldás. Az ilyen diofantikus egyenletek megoldásánál célszerű először körülbelüli nagyságrendi becsléssel kísérletezni. Ha a két oldal különböző nagyságrendű, akkor a megoldás abszolútértékére felső becslést kaphatunk, s ez után már csak véges sok esetet kell megvizsgálnunk. Az alábbi megoldás hátterében is ilyen meggondolás áll. Közelebbről egyenletünk esetében azt látjuk, hogy ha például $x \ge y$ és x elég nagy, akkor a bal oldal x^3 nagyságrendű, míg a jobb oldalon x^2y^2 áll, tehát x nagyjából y^2 nagyságrendű. Ha pedig $y \ge x$, akkor y nagyjából x^2 nagyságrendű. Ez az észrevétel a megoldás kiindulópontja: célszerűnek látszik az egyenletünket

$$xy + 1 = \big(x^2 - y\big)\big(y^2 - x\big) \tag{1}$$

alakba átírni. Szimmetria okokból a továbbiakban elegendő csak azokat az eseteket vizsgálni, amikor $x \ge y$. Ha $x = y$, akkor az

$$x^2 + 1 = \big(x^2 - x\big)^2$$

egyenlethez jutunk, aminek nincs egész megoldása. (Két négyzetszám különbsége csak úgy lehet 1, ha az egyik nulla.) A továbbiakban feltehetjük azt is, hogy $x - 1 \ge y$.

1. Tekintsük először azokat az eseteket, amikor x és y is pozitív egészek. Ekkor (1) bal oldala pozitív, jobb oldalon az első tényező szintén pozitív, tehát a második is pozitív, azaz legalább 1. Így a jobb oldal alulról becsülhető:

$$\big(x^2 - y\big)\big(y^2 - x\big) \ge x^2 - y \ge x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1 \ge xy + 1.$$

Vagyis (1)-ben a bal és a jobb oldal csak úgy lehet egyenlő, ha itt mindenütt egyenlőség áll, azaz $y = x - 1$ és $y^2 - x = 1$. Ez az $x^2 - 3x = 0$ egyenlethez vezet, aminek pozitív megoldása $x = 3$, s ekkor $y = 2$, ami valóban megoldása is az eredeti egyenletnek.

2. Tegyük fel másodszor, hogy x pozitív, y negatív. Az eredeti egyenletben a jobb oldalon álló kifejezés nem negatív, tehát a bal oldal sem lehet negatív, ebből viszont következik, hogy x (a pozitív szám) a nagyobb abszolútértékű. Legyen $y = -z$. Ekkor $x \ge z > 0$, és az (1) egyenlet így alakul:

$$-xz + 1 = \big(x^2 + z\big)\big(z^2 - x\big). \tag{2}$$

Most a bal oldal biztosan nem pozitív, a jobb oldal első tényezője pozitív, tehát a második tényező vagy nulla, vagy negatív. Utóbbi esetben a jobb oldal abszolútértéke nagyobb, mint x^2, míg a bal oldalé kisebb, ami ellentmondás. Marad még az az eset, ha $z^2 = x$ és $xz = 1$. Ebből $z^3 = 1$, így az $y = -1$ és $x = 1$ megoldást kapjuk.

3. Mindkét változó nem lehet negatív, mert akkor az eredeti egyenletben bal oldalon negatív szám állna, a jobb oldalon viszont pozitív.

4. Marad még az az eset, ha az egyik változó nulla, például $x=0$. Ekkor az egyenlet $y^3+1=0$, tehát az $x=0$, $y=-1$ (és fordítva, az $x=-1$ és $y=0$) megoldáshoz jutunk. A szimmetria figyelembevételével az összes megoldás:

$$(3;2),\quad (2;3),\quad (1;-1),\quad (-1;1),\quad (0,-1),\quad (-1;0).$$