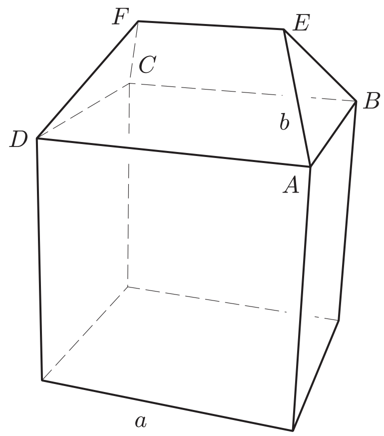
Megoldás. A kocka éle legyen a hosszúságú, a tető éle pedig b hosszúságú. A tető éleinek végpontjai az *1. ábra* szerint legyenek A, B, C, D, E és F.

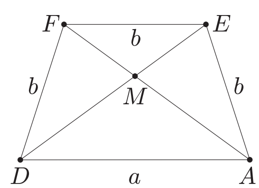


1. ábra

Az EBA, $EBCF$ és $EFDA$ oldallapok szomszédosak, ezért síkjaik páronként ugyanakkora szöget zárnak be. A három sík metszésvonalai is páronként egyenlő szögeket zárnak be, továbbá mindegyik E-ből induló él b hosszúságú. Ezek alapján az ABF háromszög (és ugyanilyen okból az ECD háromszög is) szabályos. Az $AEFD$ és $BCFE$ szimmetrikus trapézok átlói és hosszabbik alapja a, rövidebbik alapja és szárai b hosszúságúak.

Nézzük a háztetőt alkotó két szimmetrikus trapéz egyikét, legyenek ennek csúcsai A, E, F és D. A trapéz átlóinak behúzásával keletkező egyenlőszárú háromszögek szögeire az *ábra* alapján

$$MAD\sphericalangle = MDA\sphericalangle = MEF\sphericalangle = MFE\sphericalangle = MDF\sphericalangle = FAE\sphericalangle = \alpha.$$



2. ábra

Most kihasználva, hogy $AD = AF = a$ látjuk, hogy $DFM\sphericalangle = FDA\sphericalangle = 2\alpha$. Az ADF és FDM háromszögek tehát egyenlő szárúak és hasonlók, és az oldalak arányára nézve $FM : FD = FD : AF$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $(a-b) : b = b : a$. Beszorozva és rendezve

$$a^2 - ab = b^2.$$

Most nullára rendezve és a^2-tel osztva a $\dfrac{b}{a}$ arányra kapunk másodfokú egyenletet. Ennek pozitív gyöke a nevezetes aranymetszés aránya:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Megjegyzés. Ilyen háztetőt kapunk akkor, ha egy szabályos dodekaédernek egy élét kiválasztva, az él csúcsaival szomszédos további négy csúcs által meghatározott négyzet síkjával elmetsszük a dodekaédert.

Tóth Tekla dolgozata alapján