Az $a=1$, $b=1$, $c=1$ teljesíti a feltételeket. Belátjuk, hogy más megoldás nincs.

Ha a, b, c valamelyike 1 (a szimmetria miatt föltehetjük, hogy ez a), akkor a többi is 1, hiszen $b \mid 2^a-1=1$ miatt $b=1$, végül $c \mid 2^b-1=1$ miatt $c=1$.

A továbbiakban föltesszük, hogy $a, b, c \neq 1$. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy a, b és c egyike sem osztható semmilyen p prímmel.

Mivel 2^a-1, 2^b-1 és 2^c-1 páratlan számok, azért a, b és c nem osztható 2-vel. Tegyük fel, hogy egy $p \geq 3$ prím esetén a p-nél kisebb összes prímre igaz, hogy nem osztója a, b, c-nek. Belátjuk, hogy ekkor p sem osztója egyik számnak sem.

Ezt az állítást indirekt látjuk be. Tegyük fel, hogy p osztója a három szám egyikének, mondjuk a-nak. Ekkor $a \mid 2^c-1$-ből $p \mid 2^c-1$ következik. A kis Fermat-tétel szerint $p \mid 2^{p-1}-1$. Jelölje d a legkisebb olyan pozitív egész kitevőt, amelyre $p \mid 2^d-1$ teljesül. Mivel a 2-hatványok p-vel való osztási maradékai periodikusan ismétlődnek, így ezekből az következik, hogy c és $p-1$ is többszöröse d-nek. A d nyilván nem 1 (hiszen $2^1=2$ semmilyen prímmel osztva

nem ad 1 maradékot), tehát van prímosztója, és ez csak p-nél kisebb lehet (hiszen legföljebb $p-1$). Így c osztható egy p-nél kisebb prímmel. Ez az indukciós föltevés miatt ellentmondás, vagyis az eredeti feltevésünk hamis volt: nem lehet osztható p-vel a három szám egyike sem. Ezzel az indukciós lépést befejeztük.

Tehát valóban az $a=1$, $b=1$, $c=1$ az egyetlen megoldás.

Ágoston Tamás