I. megoldás. A két kör kívülről érinti egymást P-ben, ezért az O_1, P és O_2 pontok egy egyenesre esnek.

A k_1 körnek az e és az f egyenes is érintője, és ezen érintők párhuzamosok. Ezért a két érintési pont, A és C által meghatározott húr egy átmérő, és így a Thalész-tétel szerint $APC\sphericalangle = 90°$.

Mivel a $CAB\sphericalangle = 90°$, az ABC háromszög köréírt körének a BC egy átmérője. Legyen az f egyenesnek az ABC háromszög köréírt körével való másik metszéspontja F. Belátjuk, hogy F felezi a DE szakaszt.

Mivel $BFC\sphericalangle = 90°$, és a BO_2 egyenes is merőleges f-re, azért B, O_2 és F egy egyenesre esik. Tehát BF átmegy a k_2 kör középpontján, és merőleges DE-re, ezért az F pontban felezi azt. Ebből az is következik, hogy $BD = BE$.

Vizsgáljuk az $ABFC$ téglalapot. Megmutatjuk, hogy $BA = BD$. A k_1 kör sugara legyen r, a k_2 kör sugara pedig R. Jelölje S az O_1 pontból a BF egyenesre állított merőleges talppontját. Az *1. ábrán* található O_1O_2S, O_2DF és BDF derékszögű háromszögekre felírt Pitagorasz-tételek szerint:

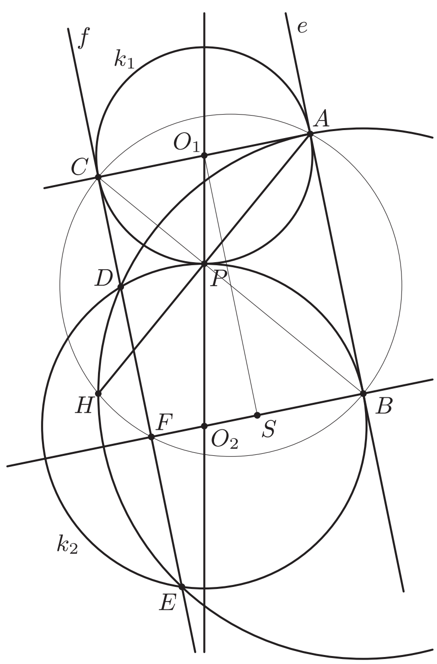
$$(R+r)^2 - (R-r)^2 = AB^2 \to AB^2 = 4rR,$$

$$DF^2 = R^2 - (2r-R)^2 = 4rR - 4r^2,$$

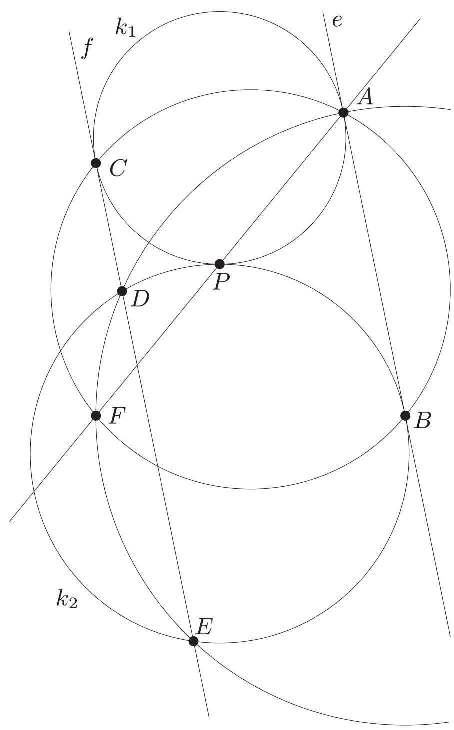
$$BD^2 = DF^2 + (2r)^2 = 4rR = AB^2.$$

Tehát beláttuk, hogy $BA = BD = BE$. Ebből következik, hogy az ADE háromszög köré írt kör középpontja a B pont.

Legyen H a két köréírt kör másik metszéspontja (az egyik A). Ekkor az is igaz, hogy $BA = BD = BE = BH$.



1. ábra



2. ábra

Mivel az ABC háromszög köréírt körének BC átmérője, azért a BHC háromszög is derékszögű, és mivel a BC oldaluk közös és $BA = BH$, az ABC és a HBC háromszögek egybevágóak. Vagyis az A illetve a H pontokból a BC-re bocsátott merőlegesek talppontja egy pontba (a P pontba) esik.

Ezzel beláttuk a feladat állítását, vagyis az AH közös húr tényleg tartalmazza a P pontot.

II. megoldás. Akalmazzunk egy B középpontú, AB sugarú inverziót. Az inverzió alapkörének és k_2-nek a metszéspontját jelölje D_1, illetve E_1.

Mivel k_2 illeszkedik B-re, inverze a D_1E_1 egyenes, azaz $k_2' = D_1E_1$. Mivel B a középpont, azért $D_1E_1 \parallel AB$. Az e egyenes illeszkedik B-re, ezért invariáns. A k_1 kör is invariáns, mert merőlegesen metszi az inverzió alapkörét. Ebből következik, hogy k_1 érinti k_2'-t, ami pedig az AB-vel párhuzamos D_1E_1 egyenes. Tehát D_1 és E_1 a feladatban szereplő D és E ponttal rendre megegyezik. Ezzel beláttuk, hogy az ADE háromszög köré írt kör középpontja B, vagyis az ADE háromszög köré írt kör az inverzió alapköre (*2. ábra*). A k_1 kör és az f egyenes érintési pontja C. Az inverziónál C' a $k_1' = k_1$ és az $f' = k_2$ érintési pontja, vagyis P. Az ABC háromszög köré írt körének képe az AP egyenes. Ez az egyenes ezért közös húrja a körnek és az inverzió alapkörének, és éppen ezt kellett bizonyítani.