

Megoldás.

$$\begin{aligned} & (2n-1)^{2n+1} + (2n+1)^{2n-1} = \\ &= (2n)^{2n+1} - (2n+1)(2n)^{2n} + \binom{2n+1}{2}(2n)^{2n-1} - \binom{2n+1}{3}(2n)^{2n-2} + \dots + \\ &+ \binom{2n+1}{2n}(2n)^1 - 1 + (2n)^{2n-1} + \binom{2n-1}{1}(2n)^{2n-2} + \\ &+ \binom{2n-1}{2}(2n)^{2n-3} + \binom{2n-1}{3}(2n)^{2n-4} + \dots + \binom{2n-1}{2n-2}(2n)^1 + 1. \end{aligned}$$

Az összegben a $\binom{2n+1}{2n}(2n)^1 - 1 + \binom{2n-1}{2n-2}(2n)^1 + 1$ kivételével az összes tag osztható 4-gyel, mert a $2n$ minden esetben legalább 2-es kitevőn van.

$$\begin{aligned} \binom{2n+1}{2n}(2n) - 1 + \binom{2n-1}{2n-2}(2n) + 1 &= (2n+1)(2n) + (2n-1)(2n) - 1 + 1 = \\ &= 2n(2n+1+2n-1) = 2n \cdot 4n = 8n^2, \end{aligned}$$

és ez is osztható 4-gyel.

Vagyis $(2n-1)^{2n+1} + (2n+1)^{2n-1}$ valóban osztható 4-gyel.