Megoldás. Vegyünk fel egy húrnégyszöget a, b, c, d oldalakkal. Legyen a BD átló hossza e. Ekkor a szemközti szögek összege $180°$, vagyis amennyiben az A csúcsnál lévő szög α, akkor a C csúcsnál lévő szög $180° - \alpha$. Írjuk fel a koszinusz-tételt az ABD és BCD háromszögekben:

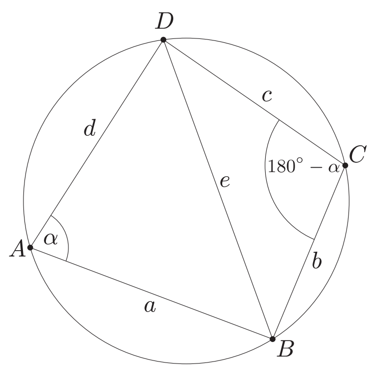
$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha, \\ e^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180° - \alpha) = \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

A jobb oldalakat egyenlővé téve és $\cos\alpha$-t kifejezve:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha,$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = \cos\alpha \cdot (2ad + 2bc),$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}.$$



Megfordítva: ha az $\dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$ érték -1 és $+1$ közé esik, akkor szerkeszthető húrnégyszög az a, b, c, d szakaszokból, hiszen akkor van olyan α szög, amelynek koszinusza $\dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$, és olyan

$$e = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha} = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$$

szakasz, amelyre $|a-d| < e < a+d$ és $|b-c| < e < b+c$. Ekkor a megszerkeszthető a, d, e és b, c, e oldalú háromszögeket közös e oldaluknál összeragasztva olyan négyszöget kapunk, amelynek az e átlóval szemközti szögei α és $180° - \alpha$, vagyis a négyszög húrnégyszög.

Vizsgáljuk meg, hogy teljesülnek-e a -1-re és $+1$-re vonatkozó egyenlőtlenségek:

$$-1 < \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc},$$

$$-2ad - 2bc < a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

$$0 < (a+d)^2 - (c-b)^2 = (a+d-c+b)(a+d+c-b).$$

Mivel az a, b, c, d szakaszokból négyszög szerkeszthető, azért $a+d+b > c$ és $a+d+c > b$, tehát mindkét szorzótényező pozitív, így az egyenlőtlenség fennáll. Hasonlóan, az

$$1 > \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$$

egyenlőtlenség ekvivalens átalakításával:

$$2ad + 2bc > a^2 + d^2 - b^2 - c^2,$$

$$0 > (a-d)^2 - (c+b)^2 = (a-d-c-b)(a-d+c+b).$$

Mivel $d + c + b > a$ és $a + c + b > d$, az első szorzótényező negatív, a második pozitív, így az egyenlőtlenség fennáll.

Tehát az a, b, c, d oldalakból húrnégyszög is szerkeszthető.