

Megoldás. 1. Osszuk a számpárok halmazát három, egyenként négy számpárból álló részre: a feladatban megadott sorrendjük szerint az első négy számpár tartozzon az első részbe, a következő négy a másodikba, az utolsó négy pedig a harmadikba. Ezzel mindegyik rész $\{(x; y + 3), (x + 1; y + 2), (x + 2; y + 1), (x + 3; y)\}$ alakú lesz. Ebből látszik, hogy a feladat első része már mindegyik négyesen belül is megoldható, pl. az $x, y + 2, y + 1, x + 3$ számok kiválasztásával; ekkor ugyanis a kiválasztott és a ki nem választott számok összege egyaránt $2x + 2y + 6$.

2. Megmutatjuk, hogy az $(1; 36), (2; 35), \dots, (10; 27)$ számpárok esetében a kért kiválasztás nem lehetséges. A számpárok kisebbik elemeinek összege 55, nagyobbik elemeinek összege pedig 315. A nagyobbik és a kisebbik elemek különbsége az egyes párokban rendre 35, 33, 31, \dots , 19, 17. Képzeljünk el egy megfelelő kiválasztást úgy, hogy először mindegyik párból a kisebbik számot választjuk ki, majd néhányukat a (nagyobb) párjukkal kicseréljük. Egy-egy ilyen cserénél az aktuálisan kiválasztott számok összege a párt alkotó számok különbségével növekszik. Mivel a kisebbik számok összege 55, és az elérendő összeg $(55 + 315)/2 = 185$, a szükséges növekmény $185 - 55 = 130$; ez azt jelenti, hogy a 35, 33, 31, \dots , 19, 17 számok között kell találni néhányat úgy, hogy az összegük 130 legyen. Négy szám ehhez biztosan kevés, mivel a négy legnagyobb különbség összege $35 + 33 + 31 + 29 = 128 < 130$. Öt szám sem lehet a megoldás, hiszen e különbségek valamennyien páratlanok, és öt páratlan szám összege páratlan lévén nem lehet 130. Így legalább hat számra van szükség; azonban a hat legkisebb különbség összege is már

$$17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 = 132 > 130.$$