Megoldás. Vizsgáljuk meg néhány n számra a $\sum \frac{1}{xy}$ összeget. $n=1$-re csak egy számpár van: $\frac{1}{1\cdot 1}=1$. Ha $n=2$, akkor két számpár van $(1;2)$ és $(2;1)$, az összeg $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 1}=1$. Ha $n=3$, akkor 4 számpár van, $(1;3)$, $(3;1)$, $(2;3)$ és $(3;2)$, az összeg

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 2}=1.$$

Azt sejtjük, hogy tetszőleges n-re a $\sum \frac{1}{xy}$ összeg 1. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz az indukciós feltétel. Azt kell belátnunk, hogy $n=(k+1)$-re is igaz az állítás. Az összeg olyan $\frac{1}{xy}$ törtek összegével csökken, amelyekre $x+y=k+1$, ugyanis ezekre még teljesül az $x+y>k$, de nem teljesül az $x+y>k+1$ feltétel. Ugyanakkor nő az összeg az olyan $\frac{1}{xy}$ törtek összegével, amelyekre $x=k+1$ és y relatív prímek, illetve azokkal, amelyekre $y=k+1$ és x relatív prímek. Ezek a párok eddig nem szerepeltek, hiszen mindegyik szám kisebb volt, mint $k+1$.

Ismert, hogy ha x és y relatív prímek, akkor $(x+y;x)=1$ és $(x+y;y)=1$. Ha ugyanis lenne $(x+y)$-nak és x-nek egynél nagyobb közös osztója, akkor az osztaná a két szám különbségét, vagyis y-t is, ez viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy x és y relatív prímek. Ennek ismeretében fogjuk belátni, hogy az összeg pontosan annyival csökken, mint amennyivel nő. Az előbb láttuk, hogy minden x, y számpárhoz hozzárendelhető két számpár, $(x+y;x)$ és $(x+y;y)$, melyekre

$$\frac{1}{(x+y)x}+\frac{1}{(x+y)y}=\frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{xy}\,.$$

Azt is látjuk, hogy az összeget növelő tagok mindegyikének megadható az $(x;y)$ párja: ha $x+y=k+1$ és x relatív prímek, akkor x és y is relatív prímek. A fenti megfeleltetés tehát kölcsönösen egyértelmű. Ezzel beláttuk, hogy ha k-ról $(k+1)$-re változik az n, akkor az összeg 1 marad.

Tehát a feladatban szereplő törtek összege minden pozitív egész n esetén 1.