

Megoldás. A sorozat első három tagja: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 7$. Ha $n \geq 3$, akkor $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ nem osztható ezen prímekek egyikével sem. Ezért p_{n+1} csak úgy lehet 11, ha

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1 = 5^m \cdot 11^k,$$

ahol $0 \leq m$ és $1 \leq k$. Tegyük fel, hogy ez a helyzet. Mivel $p_1 p_2 \dots p_n$ osztható 3-mal, $5^m \cdot 11^k$ a 3-mal maradékosan osztva 1-et ad maradékul. Másrészt 5 is és 11 is -1 -et ad maradékul 3-mal osztva, ezért $5^m \cdot 11^k$ maradéka $(-1)^{m+k}$. Így $m + k$ szükségképpen páros. Ha m és k páros, akkor

$5^m \cdot 11^k = 5^m \cdot 11^{2k'} = (4+1)^m \cdot (120+1)^{k'}$ 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Ez azonban lehetetlen, hiszen $p_1 p_2 \dots p_n$ (páros, de) nem osztható 4-gyel. Így m is és k is páratlan, ezért $5^m \cdot 11^k = 5^{2t+1} \cdot 11^{2r+1} = 55 \cdot (5^t \cdot 11^r)^2$. Nézzük e szám 7-es maradékát: $55 = 8 \cdot 7 - 1$, négyzetszám maradéka pedig 0, 1, 2 vagy 4 lehet; így a szám 7-tel osztva csak a 0, -1 , -2 vagy -4 maradékok valamelyikét adhatja. Azonban $p_3 = 7$ miatt $p_1 p_2 \dots p_n$ osztható 7-tel, ezért $p_1 p_2 \dots p_n + 1 = 5^m \cdot 11^k$ maradéka 1. A kapott ellentmondás miatt a sorozatban nem szerepel a 11.