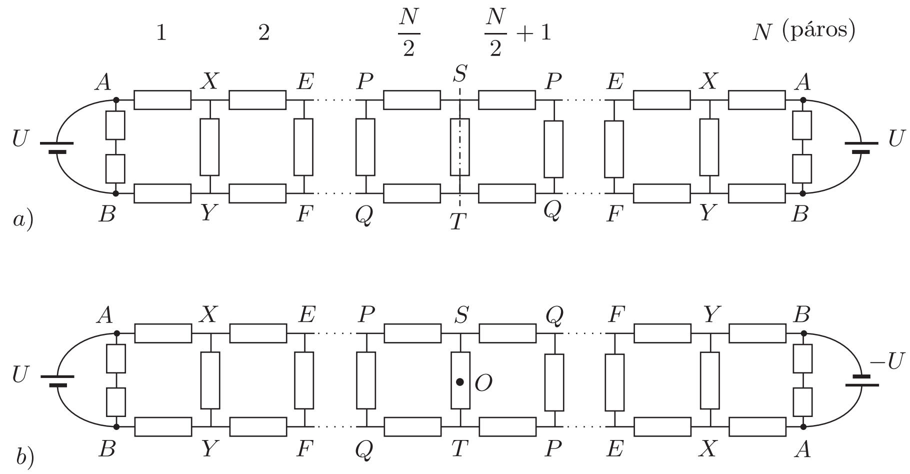
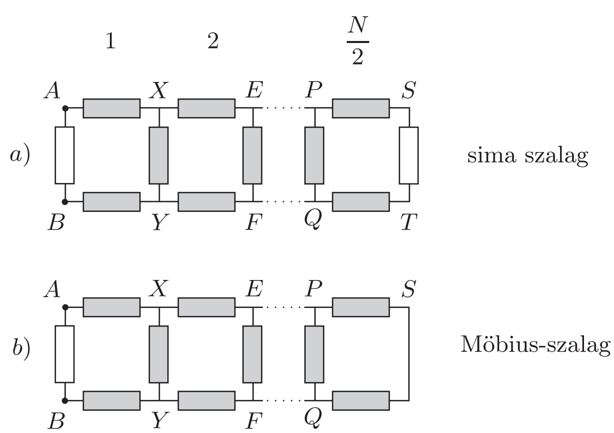
I. megoldás. A feladatban szereplő szalag A és B pontja közötti (egységnyi nagyságúnak tekinthető) ellenállást helyettesíthetjük a szalag mindkét végét lezáró, egyenként 2 egységnyi ellenállással. Ezek párhuzamos eredője ugyanis (a szalag végeinek összekapcsolása után) az eredeti, egyetlen 1 egységnyi ellenállással egyenlő. Ha az így átalakított lánc egyik végére valamekkora U feszültséget kapcsolunk, a másik végének két pontja közé pedig – valamilyen polaritással – ugyanakkora ($\pm U$) feszültséget kötünk, akkor lánc két végének összekapcsolásától akár el is tekinthetünk; a kialakuló árameloszlás (és az abból kiszámolható eredő ellenállás) az összekapcsolt és az összekapcsolatlan ellenállásláncra ugyanaz lesz.

Az azonos polaritású feszültségforrásokra kapcsolt (sima) szalagban a felező egyenesre nézve *tengelyesen szimmetrikus,* az ellentétes polaritású feszültségre kapcsolt (Möbius-) szalagban pedig annak O középpontjára nézve *centráliusan (középpontosan) szimmetrikus* feszültségeloszlás alakul ki. Az azonos potenciálú pontokat összekapcsolhatjuk, és ha így két pont közé két darab 1 egységnyi ellenállás kerül párhuzamosan kapcsolva, ezeket helyettesíthetjük egyetlen $\frac{1}{2}$ egységnyi ellenállással. Az alábbi ábrákon az 1 egységnyi ellenállást *üres* téglalappal, az $\frac{1}{2}$ egységnyi ellenállást pedig *szürke* téglalappal fogjuk jelölni.

Ha N páros, akkor az *1. ábrán* látható két helyzet jön létre (az azonos betűkkel jelölt pontok azonos potenciálúak). Ezeket a kapcsolásokat a *2. ábrán* bemutatott módon alakíthathatjuk át. Jól látszik, hogy az A és B közötti eredő ellenállás az a) esetben *nagyobb,* mint a b) esetnek megfelelő Möbius-szalagnál, hiszen a két kapcsolás csak a jobb oldali utolsó ágban különbözik egymástól, és az a b) esetben kisebb ellenállású. (Kihasználtuk, hogy a b) esetben a centrális szimmetria miatt az S és T pont azonos potenciálú, a közöttük lévő ellenállás tehát rövidzárral is helyettesíthető.)

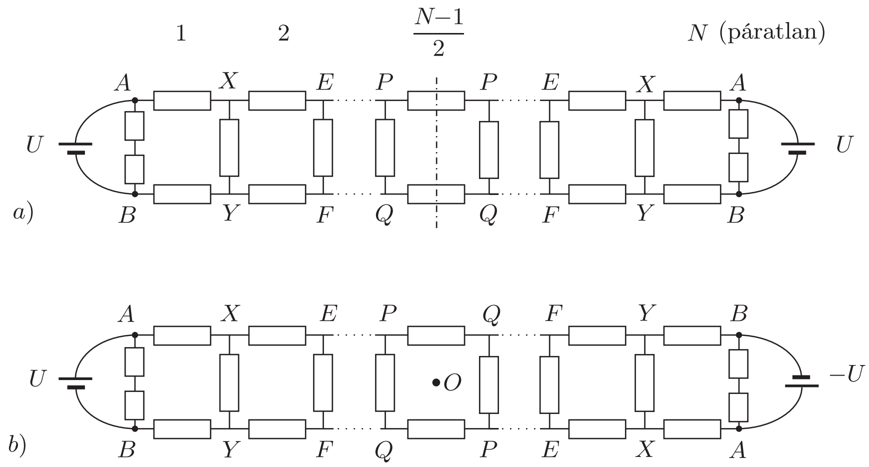


1. ábra



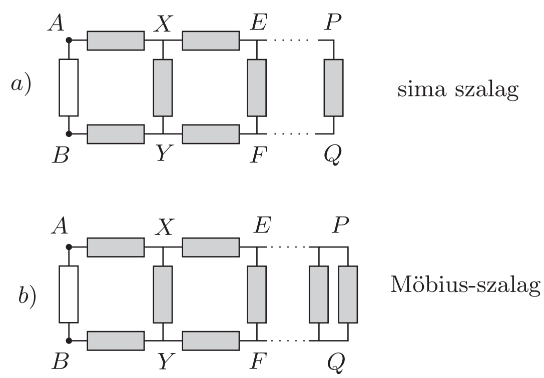
2. ábra

A páratlan N-nek megfelelő kapcsolásokat a *3. ábra* mutatja.



3. ábra

Az ekvipotenciális pontok összekötése után kialakuló kapcsolások a (*4. ábrán*) láthatók. Most is a b) esetben lesz kisebb az A és B pontok közötti eredő ellenállás, hiszen csak a jobb szélső ágban különbözik a két kapcsolás, és a szélső ág ellenállása a Möbius-szalagos kapcsolásban a kisebb.



4. ábra

II. megoldás. Az A és B pontok közötti ellenállást eltávolíthatjuk a kapcsolásból, és vizsgálhatjuk az így kapott „csonkított" (a jobb és a bal oldal felcserélésére nézve szimmetrikus) elrendezést. (A kisebb-nagyobb reláció szempontjából ez a csonkítás nyilván lényegtelen, hiszen ha a maradék lánc eredő ellenállása valamelyik esetben nagyobb, az eltávolított ellenállással együtt is ugyanebben az esetben lesz nagyobb csonkított rész és az eltávolított ellenállás párhuzamos eredője.)

Kapcsoljunk az A és B pontok közé valamekkora (mondjuk U nagyságú) feszültséget, és vizsgáljuk meg, mekkora teljesítményt vesz fel az egész ellenálláslánc. Ezt a teljesítményt kétféle módon is kiszámíthatjuk:

$$P = \frac{U^2}{R_{\text{eredő}}} = R_0 \sum_k I_k^2,$$

ahol R_0 az egyforma ellenállások nagysága, I_k pedig a k-adik ellenálláson átfolyó áram erőssége. (A k-ra vett összegzés a teljes láncra, annak minden elemére vonatkozik.) Látható, hogy annál a kapcsolásnál lesz kisebb az eredő ellenállás, amelyiknél az áramerősségek négyzetösszege nagyobb.

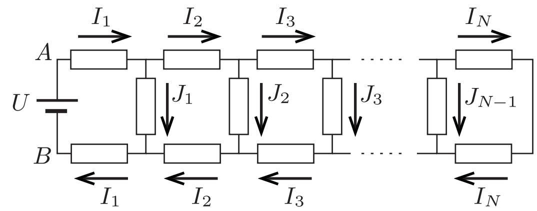
Belátjuk, hogy ez a Möbius-szalagra teljesül, vagyis

$$\sum_{\text{Möbius}} I^2 > \sum_{\text{sima}} I^2, \tag{1}$$

és emiatt

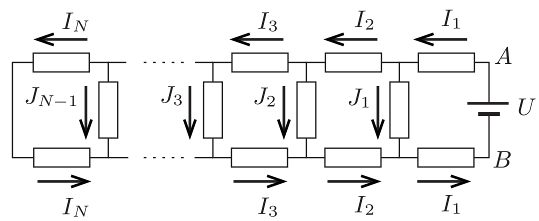
$$R_{\text{eredő}}^{(\text{Möbius-szalag})} < R_{\text{eredő}}^{(\text{sima szalag})}. \tag{2}$$

Tekintsük először az *5. ábrán* látható elrendezést, amelyben a szalag bal oldalára adott nagyságú feszültséget kapcsolunk, a jobb oldali kivezetéseit pedig rövidre zárjuk. A kialakuló áramerősségeket az ábrán látható módon jelöljük.



5. ábra

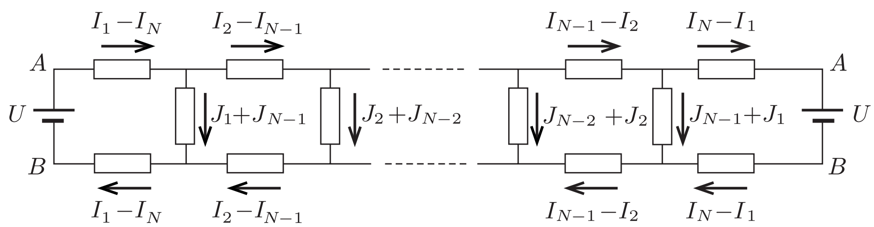
Ha ugyanezt a kapcsolást a jobb és a bal oldal felcserélésével állítjuk össze, abban a *6. ábrán* látható áramok fognak folyni.



6. ábra

Szuperponáljuk egymásra (a megfelelő feszültségek és áramerősségek összeadásával) az 5. és a 6. ábrán látható elrendezést! Ekkor a két-két végpont azonos potenciálú lesz, tehát az eredeti feladat *a*) kérdésében szereplő módon össze is köthetjük azokat. A kialakuló áramerősségeket a *7. ábra* mutatja. Eszerint a sima szalag ellenállásaiban folyó áramerősségek négyzetösszege:

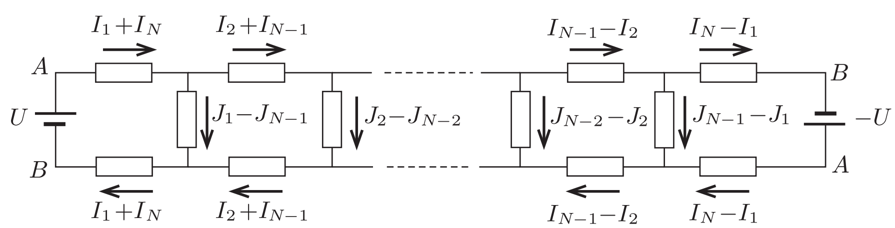
(3) $$\sum_{\text{sima}} I^2 = 2\sum_{i=1}^{N}(I_i - I_{N+1-i})^2 + \sum_{i=1}^{N-1}(J_i + J_{N-i})^2.$$



7. ábra

Hasonló módon kapjuk meg a Möbius-szalag megfelelő kifejezéseit is. Ha a 6. ábrán látható kapcsolásban $-U$ feszültséget kötünk a szalag jobb szélére, valamennyi áramerősség iránya megváltozik. A „szuperponált” elrendezésben a bal és a jobb oldali végpontok potenciálja „keresztirányban” egyezik meg egymással, tehát a *b*) esetnek megfelelően Möbius-szalagként kapcsolható össze az ellenálláslánc (*8. ábra*). Ennek megfelelően az áramok négyzetösszege:

(4) $$\sum_{\text{Möbius}} I^2 = 2\sum_{i=1}^{N}(I_i + I_{N+1-i})^2 + \sum_{i=1}^{N-1}(J_i - J_{N-i})^2.$$



8. ábra

Behelyettesítve (3)-at és (4)-et a bizonyítandó (1) egyenlőtlenségbe a négyzetes tagok kiejtése és egyszerűsítések után kapjuk, hogy

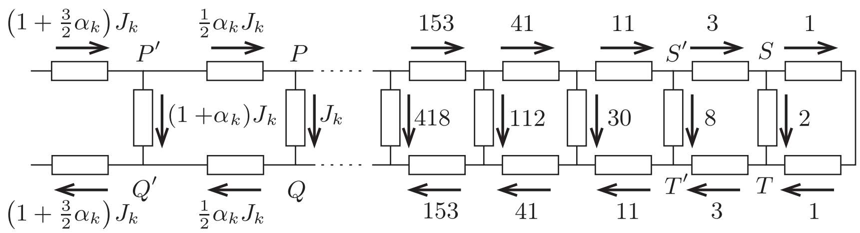
$$2I_1 \cdot I_N + \sum_{i=1}^{N-1}(2I_i \cdot I_{N+1-i} - J_i \cdot J_{N-i}) > 0.$$

Ez az egyenlőtlenség biztosan igaz, ha a zárójelben szereplő tagok mindegyike pozitív, vagyis ha:

$$\alpha_i \equiv \frac{2I_i}{J_i} > \frac{J_{N-i}}{I_{N+1-i}} \equiv \beta_{N-i}. \tag{5}$$

Belátjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség valóban teljesül, mert az α_i arányszámok mindegyike *nagyobb,* mint $1+\sqrt{3}$, a β_i számok pedig mind kisebbek, mint $1+\sqrt{3}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Kapcsoljunk az 5. ábrán látható láncra akkora feszültséget, hogy a legutolsó (a jobb szélső) ágban 1 egységnyi legyen az áramerősség (*9. ábra*).



9. ábra

Mivel a láncszemek R_0 ellenállását is egységnyinek választhatjuk, az utolsó 2 ellenálláson 2 egységnyi feszültség esik, emiatt az S és T pontok közötti „létrafokon” átfolyó áram is 2 egységnyi. A csomóponti törvény szerint az S pontba befolyó és a T pontból kifolyó áram erőssége 3 egység, az S' és T' pontok közti feszültségesés tehát $3 + 2 + 3 = 8$ egység, és ugyanekkora áram folyik S' és T' között, és így tovább fokonként meghatározhatók az áramerősségek. Kiszámíthatjuk, hogy

$$\alpha_{N-1} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3{,}000, \qquad \beta_1 = \frac{2}{1} = 2{,}000;$$
$$\alpha_{N-2} = 2 \cdot \frac{11}{8} = 2{,}750, \qquad \beta_2 = \frac{8}{3} = 2{,}667;$$
$$\alpha_{N-3} = 2 \cdot \frac{41}{30} = 2{,}733, \qquad \beta_3 = \frac{30}{11} = 2{,}727;$$
$$\alpha_{N-4} = 2 \cdot \frac{153}{112} = 2{,}7321, \qquad \beta_4 = \frac{112}{41} = 2{,}7317,$$

vagyis az egyik sorozat monoton csökken, a másik monoton növekszik, és (sejthetően) egyre jobban megközelítik az idézett $1+\sqrt{3} \approx 1{,}7320$ „határértéket”.

Ha a lánc valamelyik ágában (pl. a 9. ábrán látható P és Q pontok között) J_k áram folyik, és ismerjük az ehhez az ághoz tartozó α_k arányszámot, akkor a Kirchhoff-féle hurok- és csomóponti törvényből kiszámíthatjuk a szomszédos P' és Q' pontok közötti áram erősségét is, és innen a szomszédos ághoz tartozó α-arányt:

$$\alpha_{k-1} = \frac{2+3\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Ennek a rekurziós formulának α^* „fixpontja” az $\alpha_{k-1} = \alpha_k$ egyenlet (pozitív) gyökeként adódik:

$$\alpha^* = \frac{2+3\alpha^*}{1+\alpha^*}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \alpha^* = 1+\sqrt{3}.$$

Algebrai átalakítások után könnyen megkapható, hogy $\alpha_{k-1} < \alpha_k$ (tehát k csökkenésével a sorozat elemei monoton csökkennek), és $\alpha_{k-1} > \alpha^*$, ha $\alpha_k > \alpha^*$.

Hasonló lépésekkel láthatjuk be, hogy a monoton növekvő $(\beta_{k+1} > \beta_k)$ sorozatnak is α^* a „fixpontja”, és teljesül $\beta_{k+1} < \alpha^*$, ha $\beta_k < \alpha^*$. Ezek szerint az (5) egyenlőtlenség valóban fennáll, vagyis (1) bizonyítást nyert. Ezzel beláttuk, hogy a megcsavarás nélkül összekapcsolt szalag („létra”) bármelyik fokának végpontjai között *nagyobb* az eredő ellenállás, mint a megcsavart Möbius-szalag valamelyik fokának végpontjai közötti eredő ellenállás.