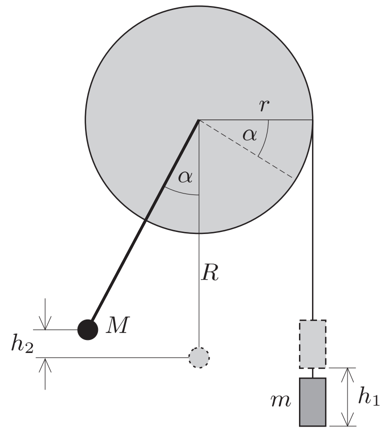

Megoldás. *a*) Az *ábrán* látható, $\alpha = 60°$-os szögelfordulásnak megfelelő helyzetben az m tömegű test az eredeti helyzetéhez képest

$$h_1 = r\alpha = 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot \frac{\pi}{3} = 0{,}105\ \mathrm{m}$$

szinttel mélyebbre, a M tömegű test pedig

$$h_2 = R(1 - \cos\alpha) = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

szintkülönbségnek megfelelő értékkel magasabbra kerül. Mivel a mozgási energia kezdetben is és ebben az állapotban is nulla, a rendszer helyzeti energiája sem változhatott meg:

$$\Delta E_\mathrm{h} = Mgh_2 - mgh_1 = 0,$$

ahonnan a rúdon lévő test tömege:

$$M = \frac{h_1}{h_2} m = 105\ \mathrm{g}.$$

b) Az új egyensúlyi helyzetet a forgatónyomatékok egyensúlya jellemzi:

$$mgr = MgR\sin\varphi,$$

vagyis

$$\sin\varphi = \frac{mr}{MR} \approx 0{,}48; \qquad \varphi \approx 28{,}6°.$$

c) Az egyensúlyi állapottól $\Delta\varphi$ szöggel eltérő helyzetben (vagyis amikor a rúd $\varphi + \Delta\varphi$ szöget zár be a függőlegessel) a rendszerre ható forgatónyomaték:

$$M(\Delta\varphi) = mgr - MgR\sin(\varphi + \Delta\varphi) = mgr - MgR(\sin\varphi\cos\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\Delta\varphi).$$

Kihasználva, hogy kicsiny szögeknél $\cos\Delta\varphi \approx 1$ és $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, a forgatónyomaték így írható:

$$M(\Delta\varphi) = [mgr - MgR\sin\varphi] - MgR\cos\varphi \cdot \Delta\varphi.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel miatt *nulla,* a forgatónyomaték tehát

$$M(\Delta\varphi) = -D^*\,\Delta\varphi,$$

ahol $D^* = MgR\cos\varphi$ az ún. direkciós forgatónyomaték.

A forgómozgás alapegyenlete szerint:

$$M = \Theta\beta,$$

ahol $\Theta = MR^2 + mr^2$ a rendszer tehetetlenségi nyomatéka, β pedig a pillanatnyi szöggyorsulás. A szögelfordulás időbeli változását leíró $\Theta\beta = -D^*\,\Delta\varphi$ egyenlet és a rezgőmozgás $ma = -D\,\Delta x$ egyenletének hasonló alakjából leolvashatjuk, hogy a csavarodási rezgések periódusideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{MR^2 + mr^2}{MgR\cos\varphi}} \approx 1{,}1\ \mathrm{s}.$$

Megjegyzés. A *c*) alkérdésre energetikai megfontolások alapján is válaszolhatunk. Ha a rendszert $\Delta\varphi$ szöggel kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, a helyzeti energia változása (a kis szögekre vonatkozó közelítő képletek alkalmazásával):

$$\begin{aligned}\Delta E_\mathrm{h} &= E_\mathrm{h}(\varphi+\Delta\varphi)-E_\mathrm{h}(\Delta\varphi)=MgR\cos\varphi-MgR\cos(\varphi+\Delta\varphi)-mgr\,\Delta\varphi=\\ &=MgR\cos\varphi(1-\cos\Delta\varphi)+MgR\sin\varphi\sin\Delta\varphi-mgr\,\Delta\varphi\approx\\ &\approx MgR\cos\varphi\cdot 2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}+\ [MgR\sin\varphi-mgr]\,\Delta\varphi\approx\frac{1}{2}MgR\cos\varphi\cdot(\Delta\varphi)^2.\end{aligned}$$

(Kihasználtuk, hogy a szögletes zárójelben álló kifejezés az egyensúlyi feltétel szerint 0.)

Látható, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített rendszer helyzeti energiája a kitérés négyzetével arányos, éppen úgy, mint egy megnyújtott rugó rugalmas energiája. Emiatt állíthatjuk, hogy mindkét test harmonikus rezgőmozgást fog végezni, a m tömegű test rezgési amplitúdója $A_1=r\,\Delta\varphi$, a M tömegű testé pedig $A_2=R\,\Delta\varphi$ lesz, amennyiben $\Delta\varphi$ a maximális szögkitérés. Ha a rezgőmozgás körfrekvenciája $\omega=(2\pi)/T$, akkor az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a mozgási energia:

$$E_\mathrm{m}=\frac{1}{2}m(A_1\omega)^2+\frac{1}{2}M(A_2\omega)^2=\frac{1}{2}\big(mr^2+MR^2\big)\omega^2(\Delta\varphi)^2.$$

A helyzeti és a mozgási energia legnagyobb értékeinek egyenlőségéből a körfrekvenciára

$$\omega^2=\frac{MgR\cos\varphi}{mr^2+MR^2},$$

a periódusidőre pedig

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mr^2+MR^2}{MgR\cos\varphi}}\approx 1{,}1\ \mathrm{s}$$

adódik.