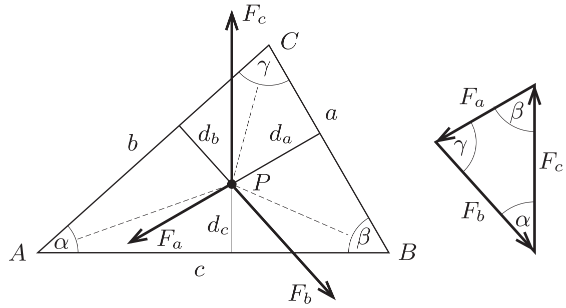
I. megoldás. Tekintsük a pálcák által kijelölt háromszög egy belső (P) pontját, és rajzoljuk be az oda helyezett ponttöltésre ható erőket!



Azt a pontot keressük, ahol a ponttöltésre ható elektrosztatikus erők kiegyenlítik egymást, azaz vektori összegük zérus. (Ilyen pont nyilván csak a pálcák által alkotott síkban és a háromszög belsejében lehet.)

Erőegyensúly esetén az egymás végébe rajzolt erővektorok záródó háromszöget alkotnak (lásd az *ábra* jobb oldali részét). Mivel mindegyik erővektor merőleges a háromszög valamely oldalára, az erővektorok alkotta háromszög és az eredeti háromszög hasonló. Így a megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{F_a}{a}=\frac{F_b}{b}=\frac{F_c}{c}. \tag{1}$$

Számítsuk most ki, hogy mekkora elektromos térerősség alakul ki egyetlen, nagyon hosszú, egyenletesen feltöltött (hosszegységenként η töltéssel rendelkező) szigetelő pálca környezetében, a pálcától r távolságban. A térerősség – a szimmetria miatt – a pálcára merőleges és mindenhol ugyanakkora $E(r)$ nagyságú. Alkalmazzuk az elektromos fluxus és a töltés nagysága között fennálló Gauss-törvényt egy L hosszúságú, a pálcával azonos szimmetriatengelyű, r sugarú hengerre:

$$E(r)\cdot 2\pi rL=\frac{1}{\varepsilon_0}\eta\, L,$$

ahonnan

$$E(r)=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\sim\frac{1}{r}.$$

Ezek szerint az egyes (ugyanakkora töltéssűrűségű) pálcák által a ponttöltésre kifejtett erő és a pálcától mért távolság szorzata ugyanakkora. Az ábra jelöléseit követve:

$$d_a\,F_a=d_b\,F_b=d_c\,F_c,$$

amit az (1) arányosságokkal összevetve

$$a\cdot d_a=b\cdot d_b=c\cdot d_c$$

adódik, vagyis a háromszög csúcsaiból a P pontba húzott szakaszok a háromszöget *egyenlő területű* részekre osztják. Ilyen tulajdonságú pont a háromszög belsejében csak egy van: a háromszög *súlypontja.* Nézzük ennek bizonyítását!

Az APB háromszög területe egyharmada az ABC háromszög területének, emiatt d_c megegyezik a c oldalhoz tartozó magasság egyharmadával. Ezek szerint a P rajta lesz az a oldalhoz tartozó magasságnak az a oldalhoz közelebbi harmadoló merőlegesén, és erre a harmadoló merőlegesre a háromszög S súlypontja is illeszkedik.

Mivel az oldalak helyzete szimmetrikus, ugyanez igaz egy másik, például a b oldalhoz tartozó magasságra is. A két harmadoló egyenesnek egyetlen metszéspontja van, a feladat egyetlen megoldása tehát a *háromszög súlypontja.*

II. megoldás. Az elektrosztatikus erők egyensúlyának megkeresése egyenértékű feladat az elektrosztatikus potenciál szélsőértékének meghatározásával. Egy végtelen hosszú egyenesnek tekinthető, egyenletesen töltött szigetelő pálca potenciálja a pálcától mért távolság logaritmusával arányos:

$$U(r)=-\int(E(r)\,\mathrm{d}r=\text{állandó}\cdot\ln r+\text{állandó}.$$

A három (ugyanakkora töltéssűrűségű) pálca elektromos potenciálja az egyes pálcák potenciáljának összege:

$$U_{\text{eredő}}=U_1+U_2+U_3=\text{állandó}\cdot\ln\left(d_a\,d_b\,d_c\right)+\text{állandó}.$$

Ez a kifejezés akkor legnagyobb (vagy legkisebb), ha a kérdéses pontban az oldalaktól mért távolságok szorzata maximális. Ezen szélsőérték-feladat megoldása: *a háromszög súlypontja* (lásd a **B. 4636.** feladat megoldását a 25. oldalon! – a Szerk.).

Megjegyzés. A potenciálfüggvény menetéből az egyensúlyi helyzet stabilitására is következtethetünk. Ha a pálcák töltése és a ponttöltés előjele megegyezik, akkor a pálcák síkjában történő elmozdulásokra nézve az egyensúly stabil, a síkra merőlegesen viszont instabil. Ellentétes előjel esetén a helyzet fordított: a pálcák síkjából kitérített ponttöltést az elektromos erőtér visszahúzza, a pálcák síkjában történő elmozdulás hatására viszont valamelyik pálca magához rántja a ponttöltést. Ezek szerint semmilyen előjelű pálca eredő elektrosztatikus erőterében sem alakulhat ki *minden irányban stabil* egyensúlyi helyzet. Ez az állítás a nevezetes Earneshaw-tétel speciális esete.