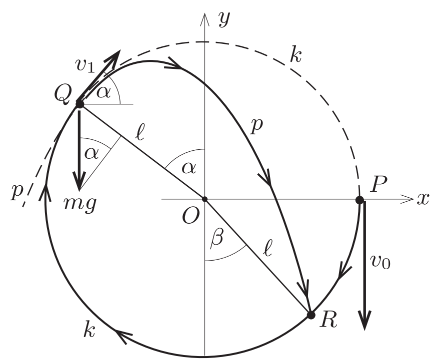
Megoldás. A P pontban v_0 sebességgel függőlegesen lefelé indított fonálinga a k körön haladva eljut az *ábrán* látható Q pontba, ahol a fonala meglazul.



Ez akkor következik be, amikor a fonálerő nullává válik, vagyis amikor az mg nehézségi erő fonálirányú komponense éppen biztosítani tudja a v_1 sebességű körmozgásnak megfelelő centripetális erőt:

$$\frac{mv_1^2}{\ell} = mg\cos\alpha, \tag{1}$$

ahol α a függőlegessel bezárt szög a meglazuláskor. A mechanikai energia megmaradásának tételéből kiszámíthatjuk az inga nehezékének sebességét a Q pontban:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell\cos\alpha + \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{2}$$

Az (1) és (2) összefüggésekből

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{3}$$

valamint

$$\cos\alpha = \frac{v_1^2}{g\ell} \approx 0{,}68; \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha \approx 47{,}2^\circ \tag{4}$$

következik.

A fonál meglazulása után az ingatest letér a k körpályáról, és egy v_1 kezdősebességű, α szögű ferde hajítás p parabolapályáján halad tovább. Ez a parabola valamely R pontban metszi a kört, a fonál ennél a pontnál feszül meg újra. Feladatunk az OR egyenes és a függőleges által bezárt β szög meghatározása.

Vegyünk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek O origója az inga felfüggesztési pontja, x tengelye vízszintesen jobbra, y tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat. Ebben a rendszerben az ingatest koordinátái t idővel a fonál meglazulása után:

$$x = v_1 t\cos\alpha - \ell\sin\alpha, \tag{5}$$

illetve

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + v_1 t\sin\alpha + \ell\cos\alpha. \tag{6}$$

A fonál akkor feszül meg újra, amikor a végén lévő test ismét ℓ távolságra kerül a felfüggesztési ponttól. Az $x^2 + y^2 = \ell^2$ összefüggés (5) és (6) behelyettesítésével t-re egy negyedfokú egyenletet ad (összhangban azzal, hogy egy körnek és egy parabolának legfeljebb 4 közös pontja lehet):

$$t^4 \cdot \frac{g^2}{4} - t^3 \cdot v_1 g\sin\alpha = 0,$$

vagyis

$$t^3\left(t - \frac{4v_1}{g}\sin\alpha\right) = 0. \tag{7}$$

Ennek az egyenletnek $t = 0$ *háromszoros gyöke,* ez a megoldás a Q pontnak felel meg.

Megjegyzés. Nem meglepő, hogy $t=0$ háromszoros gyök, hiszen közvetlenül a fonál meglazulásának pillanata előtt a test *helye, sebessége* és *gyorsulása* ugyanakkora, mint ezek a mennyiségek közvetlenül a fonál meglazulása után. Geometriai nyelven megfogalmazva: a k kör és a p parabola Q metszéspontjában a két görbe *érintője is* és a *görbülete is* megegyezik.

A (7) egyenlet számunkra érdekes negyedik gyöke

$$t_4 = \frac{4v_1 \sin\alpha}{g} \approx 0{,}345\ \mathrm{s}, \tag{8}$$

a meglazulását követően ennyi idő múlva feszül meg újra a fonál. Az inga nehezékének koordinátái ekkor (5) és (6) szerint, (1) és (8) felhasználásával:

$$\begin{aligned} x_R &= x(t_4) = \ell \sin\alpha\big(4\cos^2\alpha - 1\big) = \ell \sin(3\alpha),\\ y_R &= y(t_4) = \ell \cos\alpha\big(1 - 4\sin^2\alpha\big) = -\ell\cos(3\alpha), \end{aligned}$$

amik a keresett β szöggel is kifejezhetők:

$$x_R = \ell\sin\beta, \qquad y_R = -\ell\cos\beta.$$

Eszerint a fonál szöge az ismételt megfeszülés pillanatában

$$\beta = 180^\circ - 3\alpha \approx 38{,}4^\circ.$$