A rész. Nem önfenntartó gázkisülés

A1. Minthogy az elektronok és ionok párokban keletkeznek, sűrűségük minden időpillanatban megegyezik, $n_\mathrm{e}(t) = n_\mathrm{i}(t) = n(t)$. Az elektronok sűrűsége a külső besugárzás miatt nő, a rekombináció miatt csökken, így az

$$\dot{n}(t) = Z_\mathrm{ext} - Z_\mathrm{rek} = Z_\mathrm{ext} - rn^2$$

differenciálegyenlet írható föl. A feladat szerint az egyenlet megoldását $n(t) = n_0 + a\,\mathrm{tgh}(bt)$ alakban kereshetjük. Az $n(0) = 0$ kezdeti feltétel miatt $n_0 = 0$. Ezután az $n(t) = a\,\mathrm{tgh}(bt)$ függvényt beírva a differenciálegyenletbe, figyelembe véve, hogy $\mathrm{tgh}'\,x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$, valamint, hogy $\mathrm{ch}^2\,x - \mathrm{sh}^2\,x = 1$, rövid számolás után azt kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{\frac{Z_\mathrm{ext}}{r}}, \qquad b = \sqrt{rZ_\mathrm{ext}}.$$

A2. Egyetlen, Z_ext erősségű külső ionizáló esetén az egyensúlyi elektronsűrűség

$$n_\mathrm{e} = \lim_{t\to\infty} a\,\mathrm{tgh}(bt) = a = \sqrt{\frac{Z_\mathrm{ext}}{r}}, \tag{13}$$

ahonnan $Z_\mathrm{ext} = rn_\mathrm{e}^2$, tehát két ionizálót együtt használva $Z_{\mathrm{ext},1} + Z_{\mathrm{ext},2} = rn_\mathrm{e}^2$, így

$$n_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{Z_{\mathrm{ext},1}}{r} + \frac{Z_{\mathrm{ext},2}}{r}} = \sqrt{n_{\mathrm{e}1}^2 + n_{\mathrm{e}2}^2} = 2\cdot 10^{11}\ \frac{1}{\mathrm{cm}^3}.$$

A3. Minthogy az elektronok és ionok sűrűsége és mobilitása is megegyezik, a két töltéshordozó mozgásából származó elektromos áram is megegyezik, tehát $I = I_\mathrm{e} + I_\mathrm{i} = 2I_\mathrm{e}$. Az L hosszú, S keresztmetszetű csőben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt LSZ_ext-tel nő, másrészt, a rekombináció, illetve a kiáramlás miatt $SLrn_\mathrm{e}^2$-tel, illetve vSn_e-vel csökken időegységenként. Egyensúly esetén az elektronok száma nem változik, tehát

$$SLZ_\mathrm{ext} - SLrn_\mathrm{e}^2 - vSn_\mathrm{e} = 0.$$

Felhasználva, hogy az elektronok driftsebessége $v = \beta E = \beta\dfrac{U}{L}$, a másodfokú egyenlet pozitív megoldása n_e-re:

$$n_\mathrm{e} = \frac{\beta U}{2rL^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4Z_\mathrm{ext}}{\beta^2U^2}} - 1\right). \tag{14}$$

A keresett áramerősség:

$$I = 2I_\mathrm{e} = 2en_\mathrm{e}vS = \frac{eS\beta^2U^2}{rL^3}\left(\sqrt{1 + \frac{4rL^4Z_\mathrm{ext}}{\beta^2U^2}} - 1\right). \tag{15}$$

A4. Kis U feszültség esetén a (15) kifejezésben a gyökjel alatti második tag mellett az első, $+1$ tag, és a gyökvonás után a -1 is elhanyagolható, tehát ekkor

$$I \approx \frac{eS\beta^2U^2}{rL^3}\sqrt{\frac{4rL^4Z_\mathrm{ext}}{\beta^2U^2}} = \frac{2eS\beta U}{L}\sqrt{\frac{Z_\mathrm{ext}}{r}}.$$

(Ugyanezt az eredményt kapjuk akkor is, ha (15) egyenletben az n_e elektronsűrűség helyére nem a (14) kifejezést, hanem a zérus feszültség mellett kapott (13) értéket helyettesítjük.)

Ezt felhasználva a gáz fajlagos ellenállása:

$$\rho = \frac{US}{IL} = \frac{1}{2e\beta}\sqrt{\frac{r}{Z_\mathrm{ext}}}.$$

B rész. Önfenntartó gázkisülés. Ebben a részben az egyensúlyi áramot tanulmányozzuk, így az elektronok n_e és az ionok n_i sűrűsége nem függ az időtől, viszont az elektronlavina miatt függ a helytől. A feladat feltevése értelmében az $E = \dfrac{U}{L}$ elektromos tér a cső mentén homogén, és az elektronok valamint ionok sebessége $v = \beta E$ állandó.

B1. Ahogy a feladatban szerepel, az x tengely mutasson az L hosszúságú gázcső mentén a növekvő elektromos potenciál irányába, azaz az elektronok mozgásának irányába. Az x és $x + \mathrm{d}x$ közti szeletben levő elektronok száma egyrészt a besugárzás miatt $Z_\mathrm{ext}S\mathrm{d}x$-szel, az elektronok beáramlása miatt $vSn_\mathrm{e}(x)$-szel, az elektronlavina miatt pedig

$\alpha v S n_\mathrm{e}(x)\mathrm{d}x$-szel nő, másrészt, az elektronok kiáramlása miatt $vSn_\mathrm{e}(x+\mathrm{d}x)$-szel csökken időegységenként. Állandósult áramlás esetén azonban a teljes elektronszám nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_\mathrm{ext}S\mathrm{d}x}_{\text{besugárzás}} + \underbrace{vSn_\mathrm{e}(x)}_{\text{beáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_\mathrm{e}(x)\mathrm{d}x}_{\text{elektronlavina}} - \underbrace{vSn_\mathrm{e}(x+\mathrm{d}x)}_{\text{kiáramlás}}.$$

Az egyenletet $\mathrm{d}x$-szel osztva, és felhasználva, hogy az elektronok által képviselt áram $I_\mathrm{e}(X) = evSn_\mathrm{e}(x)$, az

$$I'_\mathrm{e}(x) = eSZ_\mathrm{ext} + \alpha I_\mathrm{e}(x)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melybe behelyettesítve a megadott $I_\mathrm{e}(x) = C_1\mathrm{e}^{A_1x} + A_2$ kísérletező függvényt, rövid számolás után az

$$A_1 = \alpha, \quad A_2 = -\frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha}, \quad I_\mathrm{e}(x) = C_1\mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha} \tag{16}$$

eredmények adódnak. (A képletekben e az elemi töltés, e pedig az Euler-féle szám.)

B2. Gondolatmenetünk az elektronáram esetéhez hasonló; állandósult áramlás esetén az x és $x+\mathrm{d}x$ közti szeletben az ionok száma nem változik, tehát

$$0 = \underbrace{Z_\mathrm{ext}S\,\mathrm{d}x}_{\text{besugárzás}} - \underbrace{vSn_\mathrm{i}(x)}_{\text{kiáramlás}} + \underbrace{\alpha v S n_\mathrm{e}(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{elektronlavina}} + \underbrace{vSn_\mathrm{i}(x+\mathrm{d}x)}_{\text{beáramlás}}.$$

(Az ionok ellentétes mozgása miatt a második és negyedik tag előjele megváltozott, és az elektronlavinát leíró tagban nem n_i, hanem továbbra is n_e szerepel!) Innen az elektronáramra kapott (16) eredményt is felhasználva az

$$I'_\mathrm{i}(x) = -eSZ_\mathrm{ext} - \alpha I_\mathrm{e}(x) = -\alpha C_1\mathrm{e}^{\alpha x}$$

összefüggés adódik, amit az adott $I_\mathrm{i}(x) = C_2 + B_1\mathrm{e}^{B_2x}$ formulával összevetve a

$$B_1 = -C_1, \quad B_2 = \alpha, \quad I_\mathrm{i}(x) = C_2 - C_1\mathrm{e}^{\alpha x} \tag{17}$$

eredményhez jutunk.

B3. Mivel az anódból nem lépnek ki ionok, ezért $I_\mathrm{i}(L) = 0$.

B4. A másodlagos elektronkeltés definíciójának értelmében $I_\mathrm{e}(0) = \gamma I_\mathrm{i}(0)$.

B5. Az előző két pontban kapott határfeltételekbe beírva a (16) és (17) formulákat megkaphatjuk a hiányzó C_1 és C_2 együtthatókat:

$$\left.\begin{aligned} C_2 - C_1\mathrm{e}^{\alpha L} &= 0 \\ C_1 - \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha} &= \gamma(C_2 - C_1) \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\gamma(1-\mathrm{e}^{\alpha L})} \\ C_2 &= \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha L}(1+\gamma)-\gamma}. \end{aligned}$$

A teljes áram az ionok és az elektronok járulékának összege. Ahogy várjuk, ez már nem függ az x helytől, és értéke:

$$I = I_\mathrm{e}(x) + I_\mathrm{i}(x) = C_2 - \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha} = \frac{eSZ_\mathrm{ext}}{\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\alpha L}(1+\gamma)-\gamma} - 1\right). \tag{18}$$

B6. Elég hosszú cső esetén az elektronlavinából keletkező elektronok elegendő töltéshordozót biztosítanak az áram fenntartásához (sőt, növeléséhez) külső gerjesztés nélkül is. A (18) képletből látszik, hogy ahogy L értékét növeljük, I nő, és $L \nearrow L_\mathrm{kr}$ esetén $I \to \infty$. Az L_kr kritikus hossz a (18) képletben szereplő tört nevezőjének zérushelye:

$$\mathrm{e}^{-\alpha L_\mathrm{kr}}(1+\gamma) - \gamma = 0 \quad\Longrightarrow\quad L_\mathrm{kr} = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right).$$