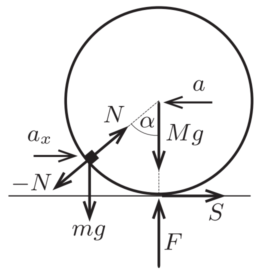
A rész. Az *1. ábra* mutatja a kis testre és a csőre ható erőket: az m tömegű kis testre az mg nehézségi erő és az N nyomóerő, az M tömegű csőre az Mg nehézségi erő, a talaj F nyomóereje, az S tapadási súrlódási erő és a kis test által kifejtett $-N$ nyomóerő hat.



1. ábra. A kis testre és a csőre ható erők

Írjuk fel a mozgásegyenletet a kis test a_{x} vízszintes (az ábrán jobbra mutató) gyorsuláskomponensére, a cső tömegközéppontjának a (az ábrán balra mutató) gyorsulására és a cső β szöggyorsulására:

$$\begin{aligned} ma_{\mathrm{x}} &= N\sin\alpha, \\ Ma &= N\sin\alpha - S, \\ \Theta\beta &= SR, \end{aligned}$$

ahol $\Theta = MR^2$ a cső tehetetlenségi nyomatéka. A cső gyorsulása és szöggyorsulása között a tiszta gördülés miatt fennáll az $a = \beta R$ kapcsolat.

Az egyenletrendszert megoldva a testek gyorsulásai között az $ma_{\mathrm{x}} = 2Ma$ összefüggés adódik. A testek kezdetben nyugalomban voltak, és ez az összefüggés a mozgás során mindvégig fennáll, így a kis test u vízszintes sebességkomponense és a cső v sebessége között is ugyanilyen kapcsolat áll fenn: $mu = 2Mv$.

A rendszer konzervatív, így teljesül az energiamegmaradás tétele. Az egyenletet a kezdeti állapotra és arra a pillanatra írjuk fel, amikor a kis test éppen legalul van (és csak vízszintes irányban mozog):

$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{\Theta\omega^2}{2},$$

ahol ω a cső szögsebessége, és a tiszta gördülés miatt $v = \omega R$.

Az egyenletekből kifejezhetjük a kis test és a cső sebességét abban a pillanatban, amikor a kis test épp legalul van:

$$u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \qquad v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}.$$

Vizsgáljuk a kis test mozgását a cső tömegközéppontjával együttmozgó vonatkoztatási rendszerben: itt a kis test R sugarú pályán körmozgást végez. A pálya legalján a sebessége $v_{\mathrm{rel}} = u + v$, centripetális gyorsulása pedig

$$a_{\mathrm{cp}} = \frac{v_{\mathrm{rel}}^2}{R} = \frac{(u+v)^2}{R}.$$

Ebben a pillanatban a cső gyorsulása nulla, így a kis test gyorsulása a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben is ugyanekkora. Így a kis testre vonatkozó mozgásegyenlet: $ma_{\mathrm{cp}} = F - mg$, amiből a keresett F erő:

$$F = 3mg\left(1 + \frac{m}{3M}\right).$$

B rész. 1) A termodinamika első főtétele alapján a gáz által felvett δQ hő

$$\delta Q = nC_{\mathrm{V}}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V,$$

a keresett C moláris hőkapacitás pedig

$$C = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} = C_{\mathrm{V}} + \frac{p}{n}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}.$$

Az egyenletekben C_{V} az állandó nyomáson mért moláris hőkapacitás, p, n, V és T pedig a buborékban lévő gáz nyomása, mólszáma, térfogata és hőmérséklete.

A Laplace-képlet alapján

$$p = \frac{4\sigma}{r},$$

és eszerint a buborékban lévő gáz állapotváltozása egy olyan politropikus folyamat, melyre $p^3V =$ állandó. Ezt összevetve az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletével kapjuk, hogy

$$T^3V^{-2} = \text{állandó},$$

amit differenciálva

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{3V}{2T}.$$

Behelyettesítve ezt az eredményt a moláris hőkapacitás képletébe:

$$C = C_V + \frac{p}{n}\frac{3V}{2T} = C_V + \frac{3}{2}R,$$

majd felhasználva, hogy a kétatomos gáz állandó térfogaton mért moláris hőkapacitása

$$C_V = \frac{5}{2}R,$$

a keresett moláris hőkapacitás

$$C = \frac{5}{2}R + \frac{3}{2}R = 4R = 33{,}2\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}.$$

2) Mivel a gáz hőkapacitása sokkal kisebb, mint a buborék hőkapacitása, valamint a gáz és a buborék között jó hőkontaktus van, a gáz állapotváltozása izotermikusnak tekinthető.

Egyensúlyi állapotban a gáz p nyomása megegyezik az r sugarú buborék p_g görbületi nyomásával:

$$p = p_\mathrm{g} = \frac{4\sigma}{r}.$$

Tekintsük a szappanhártya kicsiny A felületű darabját. Ennek tömege

$$m = \rho A h.$$

Ha a buborék sugarának kicsiny megváltozását x-szel jelöljük, akkor a felületdarabkára felírt mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} \approx (p' - p'_\mathrm{g})A,$$

ahol p' a gáz nyomása, p'_g a görbületi nyomás az $r + x$ sugarú buborékban.

Az izotermikus állapotváltozás miatt $p'V' = pV$, amiből

$$p' = p\frac{1}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^3} \approx p\left(1 - \frac{3x}{r}\right) = p_\mathrm{g}\left(1 - \frac{3x}{r}\right).$$

A görbületi nyomás

$$p'_\mathrm{g} = \frac{4\sigma}{r + x} \approx p_\mathrm{g}\left(1 - \frac{x}{r}\right).$$

Behelyettesítve a mozgásegyenletbe:

$$\rho A h\ddot{x} = p_\mathrm{g}\left(-\frac{2x}{r}\right)A, \qquad \ddot{x} = -\frac{8\sigma}{\rho h r^2}x,$$

amiből a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 108\ \mathrm{s}^{-1}.$$

C rész. *I. megoldás:* Abban a pillanatban, amikor a tekercseken át folyó áram maximális, a tekercseken nem esik feszültség. Emiatt a két kondenzátoron azonos nagyságú, ellentétes feszültségnek kell esnie. Jelöljük ebben a pillanatban a kondenzátorok feszültségét U-val, a maximális áramerősséget pedig I_0-lal.

A töltésmegmaradás miatt $q_0 = 2CU + CU$, amiből a kondenzátorok feszültsége

$$U = \frac{q_0}{3C}.$$

Az energiamegmaradás alapján

$$\frac{q_0^2}{4C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{CU^2}{2} + \frac{2CU^2}{2},$$

amiből pedig a maximális áram
$$I_0 = \frac{q_0}{3\sqrt{2LC}}.$$

Miután a K kapcsolót bezárjuk két, egymástól független rezgőkör alakul ki. Mindkét rezgőkör körfrekvenciája
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Az egyes rezgőkörökben a rezgés amplitúdóját, azaz az áramerősségek $\hat{I}_1$ és $\hat{I}_2$ maximumát az energiamegmaradás alapján határozhatjuk meg:
$$\frac{2CU^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\hat{I}_1^2}{2}, \qquad \frac{CU^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2L\hat{I}_2^2}{2},$$
amiből $\hat{I}_1 = \sqrt{5}I_0$, $\hat{I}_2 = \sqrt{2}I_0$.

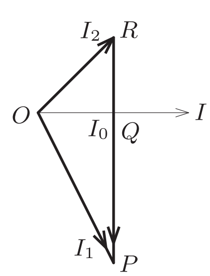
Ha az áram irányát mindkét áramkörben az óramutató járásával egyezőnek vesszük, a kapcsolón átfolyó áram: $I = I_1 - I_2$, ahol az I_1 és I_2 áramok időfüggése:
$$I_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad I_2(t) = D\cos\omega t + F\sin\omega t.$$

Az A és D konstansok meghatározásához írjuk fel a kezdeti feltételeket:
$$I_1(0) = A = I_0, \qquad I_2(0) = D = I_0,$$
a B és F konstansok meghatározásához pedig a maximális áramerősségeket:
$$A^2 + B^2 = \hat{I}_1^2, \qquad D^2 + F^2 = \hat{I}_2^2,$$
amiből
$$B = 2I_0, \qquad F = -I_0.$$
Az F együttható negatív előjele azt fejezi ki, hogy a kapcsoló bekapcsolásának pillanatában a $2L$ induktivitású tekercs árama csökken.

Eszerint az egyes rezgőkörök áramának időfüggése:
$$I_1(t) = I_0(\cos\omega t + 2\sin\omega t), \qquad I_2(t) = I_0(\cos\omega t - \sin\omega t),$$
a kapcsolón átfolyó áram időfüggvénye pedig:
$$I(t) = I_1(t) - I_2(t) = 3I_0\sin\omega t.$$

Ebből a keresett maximális áramerősség:
$$I_{\max} = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

II. megoldás: Az A, B, D és F állandók meghatározása helyett a maximális áramerősséget a *2. ábrán* látható vektordiagramból is meghatározhatjuk. A keresett $I_{\max}$ áramerősség nagyságát a PR szakasz hossza határozza meg.



2. ábra. Vektorábra a maximális áram meghatározásához

A kapcsoló bekapcsolásakor az I_1 áram növekszik, mert a $2C$ kapacitású kondenzátor továbbra is kisül, míg az I_2 áram csökken, hiszen a C kapacitású kondenzátor tovább töltődik. Emiatt az I_1 és I_2 áramokat az OP, illetve az OR vektorok ábrázolják. A vektorok hossza az *I. megoldás* alapján $\sqrt{5}I_0$, illetve $\sqrt{2}I_0$. A kapcsoló bekapcsolásakor mindkét áram nagysága I_0, ami az ábrán éppen az OQ szakasz hossza.

A Pitagorasz-tétel alapján ebből:

$$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = 2I_0, \qquad QR = \sqrt{OR^2 - OQ^2} = I_0,$$

ebből pedig a keresett maximális áramerősség:

$$I_{\max} = PR = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

III. megoldás: Mivel a két rezgőkör körfrekvenciája megegyezik, a kapcsolón átfolyó áram körfrekvenciája is ugyanakkora lesz. A kapcsoló zárásakor a rajta átfolyó áram értéke nulla, így a kapcsolón át folyó I áram időfüggvénye:

$$I(t) = I_{\max} \sin \omega t, \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Mivel a kapcsoló zárásakor ez az áram nulla

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega},$$

ahol $\dot{I}$ az áram idő szerinti deriváltjának értéke a bekapcsolás pillanatában.

Legyen egy adott pillanatban a $2C$ kapacitású kondenzátor töltése q_1. Ekkor a másik kondenzátor töltése a töltésmegmaradás miatt $q_2 = q_0 - q_1$ lesz. A kapcsoló zárása után

$$\dot{I}_1 = \omega^2 q_1, \qquad \dot{I}_2 = -\omega^2 (q_0 - q - 1).$$

A kapcsolón átfolyó áram idő szerinti deriváltja

$$\dot{I} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \omega^2 q_0,$$

amiből pedig a keresett maximális áram:

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega} = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}.$$

Ebből a megoldásból az is látszik, hogy a maximális áram értéke független a kapcsoló zárásának időpontjától.