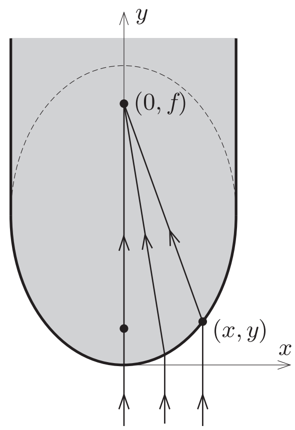
Megoldás. Helyezzük el az üvegrudat (az *ábrán* látható módon) egy olyan koordináta-rendszerbe, amelynek y tengelye a rúd szimmetriatengelye, az origója pedig a legömbölyített végének „csúcspontja”. Legyen a legömbölyített forgásfelületet jellemző görbének (a felület vezérgörbéjének) egyenlete: $y = f(x)$, célunk ezen függvény meghatározása.



Egy távoli fényforrásból a negatív y tengely irányából (gyakorlatilag) párhuzamosan érkező fénysugarak *mindegyike* ugyanabban a pontban, az origótól f távolságban éri el az optikai tengelyt. A *Fermat-elv* szerint a fénysugarak olyan útvonalon jutnak el a fényforrásból egy tetszőlegesen kiválasztott pontba, amely útvonalon a fény terjedésének ideje a közeli (szomszédos) útvonalakhoz viszonyítva minimális. Esetünkben a fény többféle úton is eljuthat a fényforrásból a fókuszpontba, ez csak úgy teljesítheti a Fermat-elv feltételét, ha mindegyik úton *ugyanannyi* a fény terjedési ideje.

A távoli fényforrásból a levegőben majdnem pontosan párhuzamosan haladó fénysugarak az $y = 0$ síkot ugyanannyi idő alatt érik el. Elegendő tehát az időtartamok egyenlőségét ettől a síktól a fókuszpontig vizsgálni. Az időtartamok a tényleges út hosszának és a törésmutatónak szorzatával (az ún. optikai úthosszal) arányosak.

A Fermat-elv állítása szerint a levegőben megtett y hosszúságú út és az üvegben befutott $n\sqrt{x^2 + (f-y)^2}$ optikai úthossz összege minden x-re ugyanakkora, x-től független állandó kell hogy legyen. Ez az állandó az optikai tengely mentén haladó sugárra nyilván nf. A párhuzamos sugarakat „tökéletesen” fókuszáló üvegrúd legömbölyítésének egyenlete tehát:

$$y + n\sqrt{x^2 + (f-y)^2} = nf,$$

ami algebrai áralakítások után

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$$

alakra hozható, ahol

$$a = \frac{n}{n+1}f \qquad \text{és} \qquad b = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f.$$

Ez az egyenlet egy a és b féltengelyekkel rendelkező ellipszist ír le, az üvegrúd legömbölyítése tehát forgásellipszoid alakú felület. Az üvegrúd átmérője legfeljebb akkora lehet, mint az ellipszis $2b$ kistengelye.

Megjegyzés. Érdekes, hogy az ellipszis távolabbi geometriai fókuszpontja éppen az üvegrúd optikai fókuszpontjával esik egybe, továbbá az ellipszis lapultságára jellemző szám, az excentricitás az üveg törésmutatójának reciprokával egyenlő.