Megoldás. *a*) A K_2 kapcsoló zárásával a gömbök (a végtelenben választott nullszinthez képest) $U/2$ és $-U/2$ potenciálra töltődnek fel, mert a helyzetük (a töltésük előjelétől eltekintve) szimmetrikus, és a potenciáljaik különbsége a telep U feszültsége. Az r sugarú gömbkondenzátor kapacitása $C = 4\pi\varepsilon_0 r$, így a gömbök töltésének nagysága

$$Q_a = C\,\frac{U}{2} = 2\pi\varepsilon_0 r U,$$

a töltések előjele pedig ellentétes lesz. (Ez az összefüggés szigorúan véve csak akkor lenne igaz, ha egyetlen gömböt töltenénk fel $U/2$ potenciálra, és a másik gömb nem lenne jelen. Mivel azonban fennáll $d \gg r$, jó közelítéssel állíthatjuk, hogy egyik gömb sem „zavarja" a másik gömb elektromos terét, az lényegében ugyanolyan, mintha a töltött gömb csak egymaga lenne.)

A gömbök távolsága sokkal nagyobb, mint a méretük (sugaruk), emiatt a közöttük fellépő vonzóerő számítható úgy, mint a ponttöltéseknél:

$$F_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_a^2}{d^2} = \pi\varepsilon_0 U^2 \left(\frac{r}{d}\right)^2.$$

A további megfontolásainkat a könnyebb *c*) esettel kezdjük, majd utána térünk rá a nehezebb *b*) kérdésre.

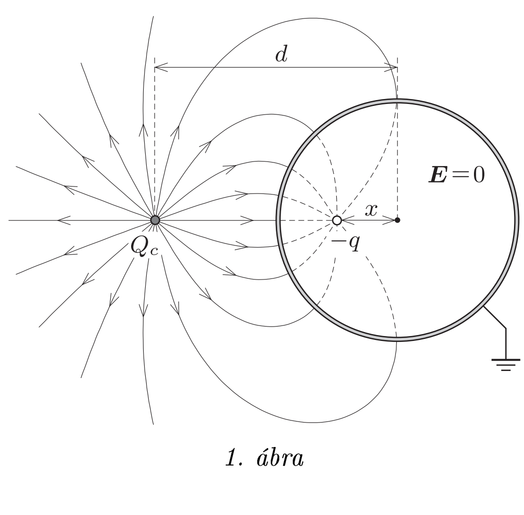
c) Legyen a bal oldali gömb A jelű, a jobb oldali pedig B. Ha mindkét kapcsolót zárjuk, akkor az A gömb potenciálja U lesz, a B gömb potenciálja pedig nulla marad. Az A gömb

$$Q_c = CU = 4\pi\varepsilon_0 r U$$

töltésre töltődik fel, ami a kezdetben semleges B fémgömb felületén töltésátrendeződést (és a földelésen keresztül egy csekély feltöltődést) hoz létre úgy, hogy a B gömb felülete továbbra is mindenhol nulla potenciálú legyen.

A tükörtöltés (gömbi inverzió) módszere szerint a B gömbön ***kívül*** kialakuló elektromos mező éppen olyan, amilyent a d távol levő (pontszerűnek tekinthető) Q_c töltés és egy másik, $-q = -Q_c \cdot (r/d)$ töltésű, a gömb középpontjától $x = r^2/d$ távolságban lévő ***tükörtöltés*** hozna létre. Az *ábra* (amelynek arányai az áttekinthetőség kedvéért erősen eltérnek a feladatban szereplő esettől) a pontszerű töltéssel helyettesített A gömb és a tükörtöltés együttes elektromos terét mutatja a gömbön kívül, illetve annak belsejében.

Ellenőrizhető, hogy ekkor a B gömb felületének minden pontjára igaz: a valódi Q_c töltéstől és a tükörtöltéstől mért távolságának aránya ugyanakkora (nevezetesen r/d), vagyis a B gömb a töltés és a tükörtöltés Apollóniusz-gömbje. Emiatt a töltés és a tükörtöltés által létrehozott potenciál a B gömb felületének minden pontjában valóban *nulla.*



1. ábra

A B gömb össztöltése $-Q_c \cdot (r/d)$ sokkal kisebb az A gömb töltésénél, így az nem okoz számottevő töltésátrendeződést az A gömbön. Mindkét töltést ($d \gg r$ miatt) pontszerűnek tekinthetjük, és a távolságukat d-vel közelíthetjük, így a gömbök között fellépő vonzóerő:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_c \cdot Q_c \frac{r}{d}}{d^2} = 4\pi\varepsilon_0 U^2 \left(\frac{r}{d}\right)^3.$$

b) Ha csak a K_1 kapcsolót zárjuk, akkor az A gömb U potenciálra, $Q_c = CU$ töltésre (vagyis az előbbi esettel megegyező mértékben) töltődik fel, míg a B gömb össztöltése nulla marad, miközben a felülete ekvipotenciális (jóllehet *nem nulla* potenciálú) marad. Az utóbbi feltétel a középponttól r^2/d távolságben elhelyezett $-Q_c \cdot (r/d)$ nagyságú tükörtöltéssel biztosítható, a nulla össztöltés feltétele pedig a gömb középpontjába helyezett $+Q_c \cdot (r/d)$ töltéssel elégíthető ki. (A középpontban lévő „második tükörtöltés" szerencsére nem rontja el a gömbfelület ekvipotenciális jellegét.) A kétféle tükörtöltés elektromos tere (a valódi töltés terével együtt) csak a B gömbön kívül írja le a tényleges elektromos mezőt, a gömb belsejében a térerősség nulla.

A B gömb által az A gömbre kifejtett erő a Q_c töltéstől $d-(r^2/d)$ távol lévő $-Q_c\cdot(r/d)$ tükörtöltés vonzóerejének és a d távolságban található $+Q_c\cdot(r/d)$ töltés által kifejtett taszítóerőnek az eredője. (Ezen két erő csak a töltések eltérő távolsága miatt különböző nagyságú.) Felhasználva, hogy $d\gg r$:

$$\frac{1}{\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2}-\frac{1}{d^2}=\frac{d^2-\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2}{\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2d^2}=\frac{\left(2d-\frac{r^2}{d}\right)\frac{r^2}{d}}{\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2d^2}\approx\frac{2r^2}{d^4},$$

a gömbök közötti vonzóerő:

$$F_b=\frac{Q_c\cdot Q_c\frac{r}{d}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(d-\frac{r^2}{d}\right)^2}-\frac{1}{d^2}\right)\approx 8\pi\varepsilon_0U^2\left(\frac{r}{d}\right)^5.$$

Megjegyzés. Látható, hogy az erőhatás az a) esetben a legerősebb, itt az U feszültséggel arányos töltések közötti Coulomb-erő jelenik meg (bár ez az erő a gömbök nagy távolsága miatt igencsak gyenge). A c) esetben az A fémgömb számottevően feltöltődik, de B-re csak a távoli A gömb elektromos terének hatására kerül (a földelésből) egy kevés töltés. Végül a b) esetben a telep hatására feltöltött egyik gömb megosztást hoz létre a másik gömbön, és a töltések átrendeződése (A-tól mért távolságuk megváltozása) okoz még a c) esetnél is sokkal kisebb erőhatást.

Fehér Zsombor dolgozata alapján