Megoldás. *a*) Az emelés közben a rugón munkát végzünk: egyrészt megemeljük a tömegközéppontját; másrészt megnyújtjuk a rugót. Számítsuk ki a rugó gravitációs helyzeti energiájának és a rugalmas energiájának megváltozását, ezek összege éppen a kérdéses munkával egyenlő.

A slinky megnyúlását a saját súlya okozza, de ez a megnyúlás nem egyenletes. A megemelt rugó tetejét nagyobb, az alját pedig kisebb erő terheli, emiatt a rugó felső felén ritkábban, az alján pedig sűrűbben helyezkednek el a menetek. A rugó teljes megnyúlását egy elfogadható modell alapján számíthatjuk ki. Gondolatban felosztjuk az m tömegű slinky-t n darab ($n \gg 1$) kisebb, tömegtelen rugóra, és mindegyik kis rugó alsó végéhez egy-egy m/n tömegű, pontszerű testet képzelünk. Ha az egész slinky rugóállandója D, akkor a kis rugók rugóállandója nD, hiszen ugyanakkora feszítőerő hatására mindegyikük megnyúlása csak n-ed része az egész rugó megnyúlásának.

A függőlegesen lelógó rugó egyes darabkáit különböző nagyságú erő feszíti, így a megnyúlásuk is különböző lesz. A modell szerint a legalsó kis rugót mg/n erő feszíti, így a megnyúlása (vagyis a hossza, hiszen a feszítetlen hosszát nullának vehetjük):

$$\ell_1 = \frac{(m/n)g}{nD} = \frac{mg}{n^2 D}.$$

Az alulról számított második rugót $2(m/n)g$ erő terheli, a megnyúlása tehát

$$\ell_2 = 2\frac{(m/n)g}{nD} = 2\frac{mg}{n^2 D},$$

és általánosan, a k-adik rugócska megnyúlása

$$\ell_k = k\frac{(m/n)g}{nD} = k\frac{mg}{n^2 D}.$$

A kis rugók hosszát összeadva a megemelt slinky teljes L hosszát kell kapjuk:

$$L = \sum_{k=1}^{n} \ell_k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{mg}{n^2 D} = \frac{mg}{n^2 D}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{mg}{n^2 D}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{mg}{2D}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

A zárójelben álló kifejezés 1-nek vehető, hiszen $n \gg 1$. Ezek szerint a slinky rugóállandója:

$$D = \frac{mg}{2L}.$$

A következő lépésben számítsuk ki a megemelt rugó tömegközéppontjának magasságát! Minden (m/n tömegű) rugódarabka alsó vége olyan magasra kerül, amennyi az alatta levő rugók hosszának összege. Így a k-adik rész magassága:

$$h_k = \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i = \frac{mg}{n^2 D}\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{mg}{n^2 D}\,\frac{k(k-1)}{2}.$$

A rugó tömegközéppontjának magassága (ami a modellünkben a rugók végén lévő pontrendszer tömegközéppontjának magasságával egyezik meg) a h_k magasságok súlyozott középértéke:

$$h_{\mathrm{tkp}} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{m}{n}\,h_k = \frac{mg}{2n^3 D}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{mg}{6D}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \approx \frac{L}{3}.$$

(Alkalmaztuk az első n egész szám négyzetösszegének $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ képletét, valamint behelyettesítettük D korábban kiszámított értékét.) A megemelt slinky tömegközéppontja tehát a hosszának egyharmadánál van, így a rugó helyzeti energiája $E_{\mathrm{h}} = \frac{1}{3}mgL$.

Hátra van még a megnyújtott rugó rugalmas energiájának számítása. Ez a kis rugókban tárolt energiák összege:

$$E_{\mathrm{r}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(nD)\ell_k^2 = \frac{1}{2}(nD)\left(\frac{mg}{n^2 D}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{m^2 g^2}{6D}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right).$$

Az utolsó két zárójeles kifejezés $n \gg 1$ miatt 1-gyel helyettesíthető, így D korábban kiszámított értékét felhasználva a rugalmas energiára végül $E_{\mathrm{r}} = \frac{1}{3}mgL$ adódik. A végzett munka tehát $W = E_{\mathrm{h}} + E_{\mathrm{r}} = \frac{2}{3}mgL$.

b) Az elengedést követően a rugó tömegközéppontja szabadon, g gyorsulással esik lefelé. Az induláskor a tömegközéppont $L/3$ magasan volt, az éppen összecsukódott rugó tömegközéppontja pedig gyakorlatilag az asztal szintjénél (nulla magasságban) található, a rugó sebessége ekkor $v = \sqrt{\frac{2}{3}gL}$ lesz.

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy az összecsukódott rugó teljes mechanikai energiája (esetünkben a mozgási energiája) *kevesebb,* mint az emelés közben végzett munka (vagyis a slinky energiája az elengedés pillanatában):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{3}mgL \neq W = \frac{2}{3}mgL.$$

Az összecsukódó rugó meneteinek rugalmatlan ütközésekor a rugó mechanikai energiájának fele más energiává alakul át (a rugót és a környezetét melegíti, illetve hangként kisugárzódik.)