Megoldás. A Gauss-féle fluxustörvény segítségével megállapíthatjuk, hogy a szigetelő szál hengerszimmetrikus elektromos terének távolságfüggése:

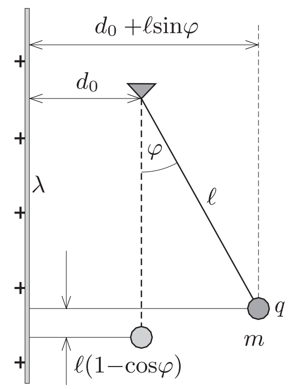
$$E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Célszerű a golyó helyzetét a kitérülés φ szögével jellemezni (*1. ábra*). Ezzel kifejezve

$$\Delta E_{\text{helyzeti}}=mg\ell(1-\cos\varphi),$$

az elektrosztatikus erőtér által végzett munka pedig

$$W=\int\limits_{d_0}^{d_0+\ell\cdot\sin\varphi} qE(r)\,\mathrm{d}r=\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{d_0}^{d_0+\ell\sin\varphi}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r=\frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d_0+\ell\sin\varphi}{d_0}.$$



1. ábra

Megjegyzés. Kihasználtuk, hogy az $1/x$ függvény a és b határok közötti integrálja (grafikonjának görbe alatti területe) $\ln(b/a)$. Ezt a képletet használjuk többek között a gázok izoterm tágulásakor végzett munka kiszámításánál is; lásd a Függvénytáblázat 32. és 140. oldalát!

A fémgolyó mozgási energiáját a φ szöggel jellemzett helyzetben a munkatétel segítségével adhatjuk meg:

$$W=\Delta E_{\text{helyzeti}}+\Delta E_{\text{mozg.}}.$$

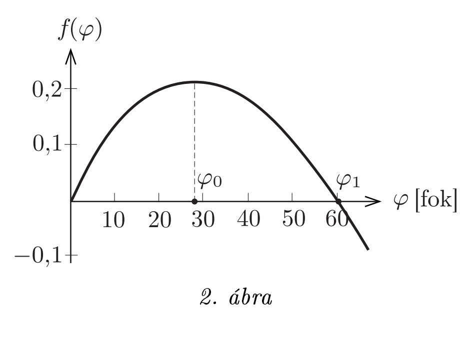
Mivel a test sebessége az induláskor nulla volt,

$$E_{\text{mozg.}}=W-\Delta E_{\text{helyzeti}}=mg\ell\left(\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 mg\ell}\ln\frac{d_0+\ell\sin\varphi}{d_0}-1+\cos\varphi\right)\equiv$$
$$\equiv mg\ell\cdot f(\varphi).$$

Az itt szereplő $f(\varphi)$ függvény, amely a feladatban szereplő számadatok mellett

$$f(\varphi)=\frac{1}{2}\ln(1+2\sin\varphi)-1+\cos\varphi$$

alakú, grafikonját a *2. ábra* mutatja. Ennek a függvénynek $\varphi_1>0$ zérushelye éppen a fémgolyó megállásának (tehát az a) kérdésben szereplő legnagyobb eltávolodásnak) megfelelő szög, a φ_0 maximumhelye pedig a b) kérdésre adja meg a választ.



2. ábra

Megjegyzés. A grafikus ábrázolást könnyen megoldhatjuk a

```
http://www.wolframalpha.com/
```

címen található Wolfram Alpha program segítségével. Esetünkben a

```
plot cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180)), 0<x<90
```

beírása után vázlatos képet kapunk a vizsgálandó függvényről. A zérushely pontosabb számértéke a

```
solve cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180))=0, 0<x<90,
```

a szélsőérték pedig a

```
maximum cos(pi x/180)-1+(1/2) ln(1+2sin(pi x/180)), 0<x<90
```

utasításokkal kapható meg.

Függvények rajzolásához (és még sok máshoz) jól használható az ingyenesen letölthető *GeoGebra* matematikai program is.

A grafikus és numerikus vizsgálat szerint a zérushely $\varphi_1 \approx 60{,}2^\circ$-nél található, így a golyó legnagyobb eltávolodása a fémszáltól: $d_{\max} = d_0 + \ell \sin\varphi_1 \approx 13{,}67$ cm, a legnagyobb sebességhez tartozó szög pedig $\varphi_0 \approx 27{,}4^\circ$.