Megoldás. Jelöljük az inga felfüggesztési pontját B-vel, az ütközőt pedig A-val. A kocka (és ezzel az egész rendszer) tehetetlenségi nyomatéka a B pontra a Steiner-tétel szerint:

$$\Theta_B = \frac{1}{6}ma^2 + m(10\,a)^2 = \frac{601}{6}ma^2.$$

Ha az ingát (az *ábrán* látható módon) valamekkora α szögben kitérítjük, a kocka tömegközéppontja

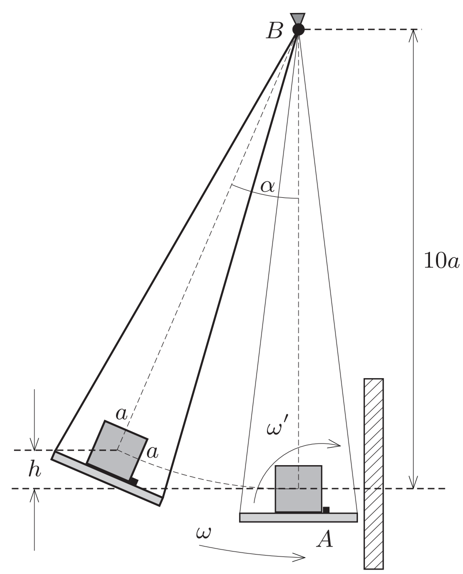
$$h = 10a(1-\cos\alpha) \tag{1}$$

magassággal kerül feljebb. A falnak ütközést közvetlenül megelőző pillanatban az inga ω szögsebessége a mechanikai energiamegmaradás törvényéből számítható:

$$mgh = \frac{1}{2}\Theta_B\omega^2,$$

ahonnan

$$\omega = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{12gh}{601}}. \tag{2}$$



Az ütközés előtt a kocka tömegközéppontja $10\,a\omega$ nagyságú vízszintes sebességgel rendelkezik, emellett a kocka a tömegközéppontja körül ω szögsebességgel forog. Ezen két mozgás miatt a kocka az A pontra vonatkoztatott perdülettel rendelkezik, ennek nagysága a tömegközépponti mozgás perdületének és a sajátperdületnek az előjeles összege:

$$N = 10a\omega m\frac{a}{2} - \frac{ma^2}{6}\omega = \frac{29}{6}ma^2\omega. \tag{3}$$

Az ütközés után a kocka megbillen, és az A ütköző körül valamekkora ω' szögsebességgel kezd el mozogni. Mivel az ütközőre (mint tengelyre) vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték (ismét a Steiner-tételt alkalmazva):

$$\Theta_A = \frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2, \tag{4}$$

az ütközés utáni perdület (az A tengelyre vonatkoztatva):

$$N' = \Theta_A\,\omega' = \frac{2}{3}ma^2\omega'. \tag{5}$$

A rövid ideig tartó ütközés során az A ütközőnél nagy erők lépnek fel, ezek mellett az mg nehézségi erő nem számottevő. Az ütközőnél fellépő erőknek nincs A körüli forgatónyomatéka, emiatt a kocka perdülete erre a tengelyre megmarad: $N = N'$, azaz (3) és (5) felhasználásával

$$\omega' = \frac{29}{4}\omega. \tag{6}$$

Az ω' szögsebességgel elinduló kocka akkor fog átborulni az ütközőn, ha a mozgási energiája elegendően nagy a tömegközéppont 45°-nyi elforduláshoz tartozó megemeléséhez. Határesetben:

$$\frac{1}{2}\Theta_A\omega'^2 = mg\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2}\right).$$

Innen az (1), (2) és (4) összefüggéseket felhasználva a kitérítés szögére

$$\cos\alpha < \frac{4806 - 601\sqrt{2}}{4205} \approx 0{,}941, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha > 19{,}8^\circ$$

adódik.

Megjegyzés. Ha a kitérített inga mozgásának leírásánál a kockát tömegpontnak tekintjük (vagyis a tömegközéppontja körüli forgást elhanyagoljuk), az ω szögsebességet kicsit pontatlanul számoljuk. Ez azonban csak ezrelékes nagyságrendű hibát okoz, tehát a szokásos számolási pontossági igények mellett elfogadható. Más a helyzet az ütközésnél, ott a kocka sajátperdületének figyelmen kívül hagyása már néhány százaléknyi eltérést okoz, tehát az ilyen számítás már hiányosnak tekintendő.