Megoldás. *a*) A testek a pályájuk legalacsonyabb pontjánál, a felfüggesztés alatt fognak ütközni, hiszen az azonos hosszúságú fonálingák lengésideje független a nehezék tömegétől. Az ütközés előtt a két test sebessége ellentétes irányú és ugyanakkora,

$$v=\sqrt{2g\ell} \tag{1}$$

nagyságú.

$$Mv-mv=mu-MU, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}MU^2+\frac{1}{2}mu^2. \tag{3}$$

A számolás egyszerűsítése érdekében célszerű bevezetni a

$$\frac{M}{m}=x,\qquad \frac{u}{v}=y,\qquad \frac{U}{v}=z$$

dimenziótlan arányszámokat. Ezekkel – némi algebrai átalakítás után – (2) és (3) így írható:

$$x(z+1)=1+y, \tag{2'}$$

$$x\big(z^2-1\big)=1-y^2. \tag{3'}$$

Ennek az egyenletrendszernek nyilvánvaló megoldása $y=z=-1$, ami annak felelne meg, hogy a két golyó ütközésmentesen mozog tovább. Ezt a lehetőséget kizárhatjuk, és eloszthatjuk (3′)-t (2′)-vel:

$$z-1=1-y. \tag{4}$$

Innen z kiküszöbölése után (2′) felhasználásával az u/v arányra

$$y=\frac{3x-1}{x+1},$$

az m tömegű golyó sebességére pedig az

$$u=\frac{3x-1}{x+1}\sqrt{2g\ell}=\frac{3M-m}{M+m}\sqrt{2g\ell} \tag{5}$$

érték adódik.

Tételezzük fel, hogy az m tömegű golyó eljut a fonál által megengedett legmagasabb pontba, ez a felfüggesztési pont felett ℓ magasságban található. Ebben a pontban a golyó u' sebességére (az energiamegmaradás tétele szerint) fennáll:

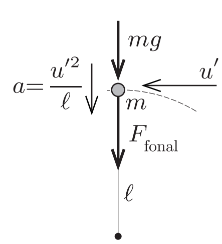
$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mu'^2+2g\ell,$$

tehát

$$u'=\sqrt{u^2-4g\ell}. \tag{6}$$

Ha u' nem elég nagy, akkor a fonál meglazul, és a golyó nem jut el a legfelső pontba. A pálya legfelső pontjában (lásd a *2. ábrát*) a fonalat feszítő erő (Newton mozgásegyenlete szerint)

$$F_{\text{fonal}}=m\frac{u'^2}{\ell}-mg\geq 0. \tag{7}$$



2. ábra

(Belátható, hogy (7) teljesülése esetén a pálya minden pontjában feszes marad a fonal.) A (7) egyenlőtlenséget (6)-ba helyettesítve az $u^2 > 5g\ell$ megszorítást kapjuk, amit (5)-tel összevetve a keresett tömegarányra végül az

$$x = \frac{M}{m} \ge \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}} \approx 1{,}82$$

korlátot kapjuk.

b) Vizsgáljuk meg, milyen magasra jut el a M tömegű test, ha a tömegek aránya éppen a kritikus érték! Az (5) összefüggésből kiszámíthatjuk, hogy $y = 1{,}58$, (4)-ből pedig a M tömegű test ütközés utáni sebességét:

$$z = 2 - y = 0{,}42; \qquad U = 0{,}42\sqrt{2g\ell}.$$

(Mivel $U > 0$, a test ténylegesen az 1. ábrán látható irányban, „visszafelé” mozog az ütközés után.) A test további mozgására felírható az energiamegmaradás törvénye:

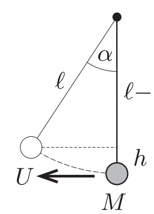
$$\frac{mU^2}{2} = mgh,$$

ahonnan az emelkedés magassága:

$$h = \frac{U^2}{2g} = 0{,}175\,\ell,$$

ami a *3. ábrán* látható emelkedési szöget is meghatározza:

$$\alpha = \arccos\frac{\ell - h}{\ell} \approx 34{,}4^\circ.$$



3. ábra