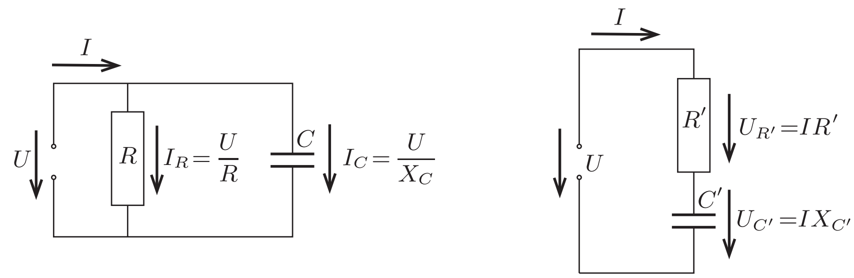
I. megoldás. A két elrendezés akkor megkülönböztethetetlen, ha egyazon feszültség hatására ugyanaz az áram folyik át rajtuk, és a feszültség és áram közötti fáziseltolódás is ugyanakkora mindkét esetben.

Tudjuk, hogy az ohmos ellenálláson átfolyó áram a feszültséggel azonos fázisú és a nagysága $I_1 = \dfrac{U}{R}$, a kondenzátor árama viszont (ideális esetben) 90°-ot siet a feszültséghez képest, nagysága pedig $I_2 = \dfrac{U}{X_C}$, ahol $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ a kondenzátor (adott frekvencián értendő) kapacitív ellenállása.

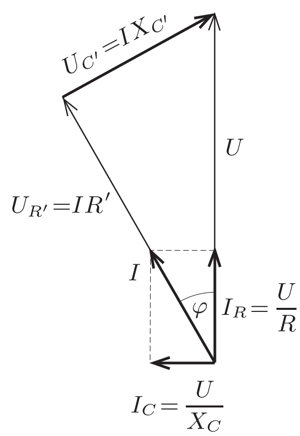
A fáziseltolódást úgy vehetjük figyelembe, hogy a feszültségeket és az áramerősségeket ún. *forgóvektoroknak* tekintjük. Az ohmos ellenállásnál a feszültség és az áram „vektora” párhuzamos, kapacitív ellenállásnál viszont merőlegesek egymásra.

Jelöljük a keresett soros kapcsolású fekete doboz ohmos ellenállását R'-vel, kapacitív ellenállását $X_{C'}$-vel (a megfelelő kondenzátor kapacitása $C' = 1/(\omega X_{C'})$). A fekete dobozokra kapcsolt feszültség legyen U, a teljes áramerősség I, a fázistolás pedig φ (*1. ábra*).



1. ábra

A párhuzamos kapcsolásnál az áramvektorok, a soros kapcsolásnál pedig a megfelelő feszültségvektorok adódnak össze. A két kapcsolás áram- és feszültségviszonyai egyetlen vektorábrán is szemléltethetők (*2. ábra*).



2. ábra

Az ábráról leolvasható, hogy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{C'}}{U_{R'}} = \frac{X_{C'}}{R'},$$

illetve

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C},$$

ahonnan

(1) $$R\,R' = X_C\,X_{C'}.$$

Másrészt a derékszögű háromszögekre felírható Pitagorasz-tétel szerint

$$U^2 = (IR')^2 + (IX_{C'})^2, \qquad \text{illetve} \qquad I^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_C}\right)^2,$$

ahonnan (az $(I/U)^2$ arány kifejezése és kiejtése után)

(2) $$\frac{1}{R'^2 + X_{C'}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}$$

következik.

Az (1) és (2) összefüggésekből megkapjuk a soros kapcsolás ohmos és kapacitív ellenállásait:

$$R' = \frac{X_C^2}{R^2 + X_C^2}\, R \qquad \text{és} \qquad X_{C'} = \frac{R^2}{R^2 + X_C^2}\, X_C.$$

Ugyanezek a kondenzátorok kapacitásával kifejezve:

$$R' = \frac{R}{1 + R^2\omega^2 C^2}, \qquad C' = \frac{1 + R^2\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C}.$$

A két fekete dobozt tehát – adott frekvencián végzett – váltóáramú mérésekkel valóban nem lehet megkülönböztetni, amennyiben a sorosan kapcsolt áramköri elemek a fenti (ω-tól is függő) értékűek.

II. megoldás. Az elrendezések megkülönböztethetetlenek lesznek, ha dobozok eredő impedanciája és fázistolása ugyanaz lesz. Ez a két feltétel egyszerre teljesül, ha megegyezik a két kapcsolás ún. *komplex impedanciája.*

Az ohmos, induktív és kapacitív elemek soros és párhuzamos kapcsolásánál a váltóáramú hálózatok a komplex számok felhasználásával ugyanúgy számolhatók, mint az egyenáramú hálózatok, ha a megfelelő komplex ellenállások

$$Z_R = R, \quad Z_L = jL\omega, \quad \text{illetve} \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

(j a képzetes egység $j^2 = -1$ tulajdonsággal[1].)

Az eredeti párhuzamos kapcsolás és a másik, soros kapcsolás komplex impedanciájának egyenlősége:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = R' + \frac{1}{j\omega C'},$$

ami azonos átalakítással így írható:

$$\frac{\frac{1}{R} - j\omega C}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = R' - \frac{j}{\omega C'}.$$

Két komplex szám akkor egyenlő, ha mind a valós, mind pedig a képzetes részük megegyezik. Innen

$$R' = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} = \frac{R}{1 + R^2\omega^2 C^2},$$

illetve

$$C' = \frac{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C}{\omega^2 C^2} = \frac{1 + R^2\omega^2 C^2}{R^2\omega^2 C}.$$

A válasz tehát igen, megfelelően választott R' ellenállással és C' kapacitású kondenzátorral a két kapcsolás az adott ω körfrekvencián megkülönböztethetetlen.

[1] A matematikai és a fizikai szakirodalomban a képzetes (imaginárius) egységet általában i-vel jelölik, a villamosmérnöki gyakorlatban viszont a j használata terjedt el, és i betűvel az áramerősség pillanatnyi értékét jelölik.