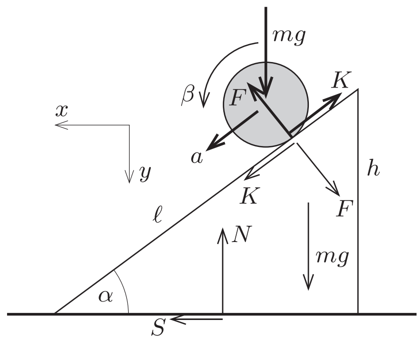
I. megoldás. Válasszuk az *ábrán* látható koordináta-rendszert, és jelöljük a hengerre, illetve a lejtőre ható erőket az ábrán látható betűkkel. (A hengerre ható erőket vastagabb, a lejtőre hatókat vékonyabb vonallal jelöltük.) A henger tömegközéppontjának gyorsulása legyen a, a henger sugara r, tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$, szöggyorsulása pedig (a csúszásmentes gördülés miatt) $\beta = a/r$.



A dinamika alapegyenletei a henger x és y irányú gyorsulására, illetve a forgómozgására:

$$F\sin\alpha - K\cos\alpha = ma\cos\alpha, \tag{1}$$

$$-K\sin\alpha - F\cos\alpha + mg = ma\sin\alpha, \tag{2}$$

$$Kr = \frac{1}{2}mr^2\,\frac{a}{r}. \tag{3}$$

Tudjuk továbbá (a lejtőre megadott geometriai adatokból), hogy $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ és $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

A lejtőre is felírhatjuk komponensenként a dinamika alapegyenletét, ezek – mivel a lejtő nem gyorsul – az erők egyensúlyát fejezik ki:

$$K\cos\alpha + S - F\sin\alpha = 0, \tag{4}$$

$$mg + F\cos\alpha + K\sin\alpha - N = 0. \tag{5}$$

Az (1)–(3) egyenletekből kiszámíthatjuk a henger és a lejtő között ható F nyomóerőt és K súrlódási erőt, valamint a henger középpontjának gyorsulását:

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha = \frac{2}{5}g,$$

$$K = \frac{1}{3}mg\sin\alpha = \frac{1}{5}mg,$$

$$F = mg\cos\alpha = \frac{4}{5}mg.$$

Ezeket (4)-be és (5)-be helyettesítve megkapjuk a talaj és a lejtő között ható erőket:

$$S = \frac{8}{25}mg \qquad \text{és} \qquad N = \frac{44}{25}mg.$$

A lejtő akkor nem csúszik meg a talajon, ha $S < \mu N$, vagyis ha a tapadási súrlódási együttható

$$\mu > \mu_{\min} = \frac{2}{11} \approx 0{,}18.$$

II. megoldás. Írjuk fel a munkatételt a h magas lejtőről leguruló hengerre! A lejtő alján a henger középpontjának sebessége legyen v, szögsebessége $\omega = v/r$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Másrészt igaz, hogy ha a tömegközéppont gyorsulása a, a mozgás ideje t és a megtett út (a lejtő hossza) $h/\sin\alpha$, akkor

$$v = at \qquad \text{és} \qquad \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a}{2}t^2.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a munkatétel egyenletébe:

$$mg\,\frac{a}{2}\,t^2\,\sin\alpha = \frac{3}{4}\,m\,(at)^2,$$

innen kapjuk, hogy a henger tömegközéppontjának gyorsulása:

$$a = \frac{2}{3}\,g\,\sin\alpha = \frac{2}{5}\,g.$$

Jelöljük a talaj és a lejtő között ható nyomóerőt N-nel, a súrlódási erőt pedig S-sel! Írjuk fel a lejtőből és a hengerből álló rendszerre Newton II. törvényét, vagyis azt, hogy a rendszer impulzusának időegységre eső megváltozása a rendszerre ható külső erővel egyenlő. A két testre összesen $2mg$ nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló nehézségi erő és a talaj által kifejtett K és N erő hat. Az impulzusváltozás (mivel a lejtő nem mozdul meg) a henger tömegközéppontjának a gyorsulásából adódik, időegységenként ma nagyságú és a lejtő esésvonalával párhuzamos irányú.

A mozgásegyenletek:

$$S = ma\,\cos\alpha,$$

illetve

$$2mg - N = ma\,\sin\alpha.$$

Innen (a gyorsulás és a szögek nagyságának ismeretében) az erők könnyen kiszámíthatók:

$$S = \frac{8}{25}\,mg \qquad \text{és} \qquad N = \frac{44}{25}\,mg,$$

a súrlódási együttható minimális értéke pedig

$$\mu_{\min} = \frac{S}{N} = \frac{2}{11}.$$