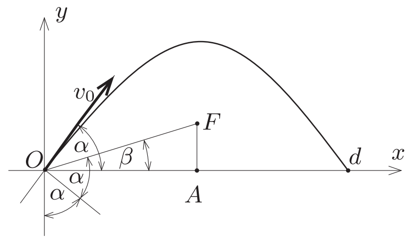
Megoldás. Válasszuk az *1. ábrán* látható koordináta-rendszert! A vízszinteshez képest α szögben elhajított test elmozdulásvektorának komponensei t idő elteltével:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y(t) = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2.$$



1. ábra

A talajra érkezésig eltelt időt az $y = 0$ feltételből kapjuk:

$$t_0 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g},$$

és ennek megfelelően a hajítás távolsága:

$$d = x(t_0) = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

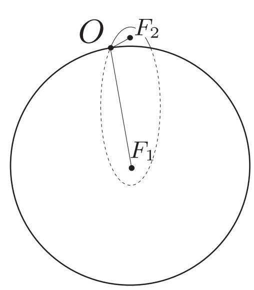
A parabola F fókuszpontja az eldobás O pontjából nézve a vízszinteshez képest valamekkora β szög magasságában található. Belátjuk, hogy ez a szög $2\alpha - 90°$. Képzeljünk a parabolapálya helyére egy (a pályagörbének a szimmetriatengelye körüli megforgatásából adódó) parabolatükröt. Ez a tükör a tengelyével párhuzamos (függőlegesen felfelé haladó) fénysugarakat az F fókuszpont irányába tükrözné. Az O pontba érkező, tehát α beesési szöggel rendelkező fénysugár a függőlegeshez képest 2α, a vízszintestől mérve $\beta = 2\alpha - 90°$-os szögben halad tovább. A fókuszpont és az elhajítás helyének távolsága:

$$OF = \frac{OA}{\cos\beta} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{\cos(2\alpha - 90°)} = \frac{v_0^2}{2g} = \text{állandó}.$$

(Kihasználtuk, hogy a fókuszpont vízszintes irányban $d/2$ távol van az elhajítás helyétől, továbbá $\cos(2\alpha - 90°) = \sin 2\alpha$.)

Azt az eredményt kaptuk, hogy a parabola fókuszpontja a kezdősebesség irányától függetlenül mindig $v_0^2/(2g)$ távolságra van a test elhajításának helyétől. Az is látszik, hogy $\beta = 0$, vagyis $\alpha = 45°$ esetén a fókuszpont az elhajítás helyével *azonos magasságban* van.

Megjegyzés. A Kepler-törvények és a Kepler-problémára vonatkozó energia-megfontolások felhasználásával is megkaphatjuk a pályagörbe fókuszpontjának távolságát az elhajítás helyétől. Kepler I. törvényét a Hold gömbszimmetrikus gravitációs terében mozgó testekre alkalmazva megállapíthatjuk, hogy a test pályája olyan ellipszis, amelynek egyik fókuszpontja (F_1) a Hold középpontja (*2. ábra*).



2. ábra

Az ellipszis nagytengelyének hossza ($2a$) csak attól függ, hogy mekkora az elhajított test teljes mechanikai energiája, vagyis a gravitációs helyzeti energia és a mozgási energia összege. (Ez a kapcsolat már nem a Kepler-törvényekből, hanem a Newton-féle mozgásegyenletekből kö vetkezik.) Az O pontból v_0 kezdősebességgel különböző irányokban elindított azonos tömegű testek helyzeti energiája is és a mozgási energiája is ugyanakkora, emiatt az ellipszispályájuk nagytengelye meghatározott nagyságú:

$$2a = OF_1 + OF_2 = \text{állandó}.$$

(F_2 az ellipszis másik fókuszpontját jelöli.) Mivel az OF_1 távolság (a Hold sugara) adott érték, az OF_2 távolság is adott nagyságú, a kezdősebesség irányától független állandó kell legyen.

A nem túlságosan nagy kezdősebességgel elindított testek pályája az ellipszis csúcspontjának közelében parabolával közelíthető. (Ez a közelítés annak felel meg, hogy a gravitációs teret a test mozgáskörzetében *homogénnek* tekintjük.) A parabola fókuszpontja az ellipszis „másik" (F_2) fókuszpontja lesz, amelynek az elhajítás helyétől mért távolsága valamennyi parabolára ugyanaz az állandó. Ez az állandó (mint az a függőlegesen felfelé indított, elfajult pályán mozgó test emelkedési magasságából látható) $v_0^2/(2g)$, ahol g a nehézségi gyorsulás az elhajítás helyén, illetve annak kis környezetében.