Megoldás. *a*) A h magasságból elengedett testek gravitációs helyzeti energiája a lejtő alján mozgási energiává alakul:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kmR^2\frac{v^2}{R^2},$$

ahol m a testek tömege, R a sugaruk, a tehetetlenségi nyomatékot pedig $\Theta = kmR^2$ alakban írtuk fel. Felhasználtuk továbbá, hogy a tiszta gördülés miatt a testek tömegközéppontjának v sebessége és a forgásuk ω szögsebessége között fennáll a $v = R\omega$ kényszerfeltétel. Ebből az indítási magasságra a következő adódik:

$$h = \frac{v^2}{2g}(1+k).$$

A tömör alumíniumhenger esetében $k_{\mathrm{Al}} = 1/2$, vagyis $h_{\mathrm{Al}} = 3v^2/(4g) = 7{,}6$ cm.

A rézcső tömege is, külső sugara is megegyezik az alumíniumhenger adataival. Így kifejezhetjük a rézcső belső r sugarát R segítségével:

$$\frac{R^2}{R^2 - r^2} = \frac{\varrho_{\mathrm{Cu}}}{\varrho_{\mathrm{Al}}} \qquad \longrightarrow \qquad r^2 = \frac{(\varrho_{\mathrm{Cu}} - \varrho_{\mathrm{Al}})}{\varrho_{\mathrm{Cu}}}R^2.$$

A rézcső tehetetlenségi nyomatékát

$$\Theta_{\mathrm{Cu}} = \frac{1}{2}\ \varrho_{\mathrm{Cu}}\pi\ell\left(R^4 - r^4\right)$$

alakban írhatjuk fel, ahol ℓ a hengeres testek hosszúsága. Kihasználhatjuk, hogy tömegek megegyeznek, ennek alapján a rézcső tehetetlenségi nyomatékra a következőt kapjuk:

$$\Theta_{\mathrm{Cu}} = \frac{1}{2}mR^2\left(1 + \frac{\varrho_{\mathrm{Cu}} - \varrho_{\mathrm{Al}}}{\varrho_{\mathrm{Cu}}}\right) = \frac{2\varrho_{\mathrm{Cu}} - \varrho_{\mathrm{Al}}}{2\varrho_{\mathrm{Cu}}}mR^2.$$

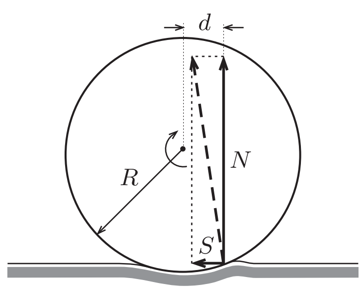
A kapott eredményből leolvasható, hogy

$$k_{\mathrm{Cu}} = \frac{1}{2}\ \frac{2\varrho_{\mathrm{Cu}} - \varrho_{\mathrm{Al}}}{\varrho_{\mathrm{Cu}}} = 0{,}85,$$

tehát

$$h_{\mathrm{Cu}} = \frac{2\left(1 + k_{\mathrm{Cu}}\right)}{3}h_{\mathrm{Al}} = 9{,}4 \text{ cm}.$$

b) A kissé puha felületen a hengeres testekre a nehézségi erő mellett a felület fejt ki erőt, melynek támadáspontja mindkét test esetén ugyanoda esik. A felület által kifejtett kényszererő (ezt szaggatott nyíl jelöli) két összetevőre bontható: a függőleges összetevő nagysága mg (ezt szokás nyomóerőnek hívni), míg a vízszintes összetevőt jelöljük S-sel (ez felel meg a tapadási súrlódási erőnek).



2. ábra

A kényszererő függőleges összetevője hatásvonalának és a hengeres test középpontjának a távolsága legyen d, a vízszintes felületen megtett utat pedig jelöljük x-szel. A testek tömegközéppontjának gyorsulását a dinamika alapegyenlete írja le:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Az alumíniumhenger esetén a vízszintes irányú gyorsulást az S_{Al} súrlódási erő okozza:

$$S_{\mathrm{Al}} = ma_{\mathrm{Al}} = m\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Al}}},$$

ahol $v = 1$ m/s és $x_{\mathrm{Al}} = 2$ m.

A tiszta gördülés miatt a henger szöggyorsulása $\beta_{\mathrm{Al}} = a_{\mathrm{Al}}/R$. Ezt a szöggyorsulást a forgómozgás alapegyenlete értelmében a testre ható erők (tömegközéppontra vonatkoztatott) forgatónyomatékának eredője hozza létre:

$$\sum M = \Theta\beta.$$

Írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét az alumíniumhengerre, majd fejezzük ki a d távolságot:

$$M = mgd - S_{\mathrm{Al}}R = mgd - m\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Al}}}R = \Theta_{\mathrm{Al}}\beta_{\mathrm{Al}} = \frac{1}{2}\,mR^2\frac{a_{\mathrm{Al}}}{R} = \frac{1}{2}\,mR^2\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Al}}R},$$

amiből

$$d = \frac{3v^2}{4gx_{\mathrm{Al}}}R.$$

A rézcső esetén a tapadási súrlódási erő más lesz (és természetesen a tehetetlenségi nyomaték is más), de a többi mennyiség ugyanaz marad. Újra fel kell írnunk a haladó mozgásra és a forgásra a dinamikai alapegyenleteket:

$$S_{\mathrm{Cu}} = ma_{\mathrm{Cu}} = m\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Cu}}},$$

$$M = mgd - S_{\mathrm{Cu}}R = mgd - m\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Cu}}}R = \Theta_{\mathrm{Cu}}\beta_{\mathrm{Cu}} =$$

$$= k_{\mathrm{Cu}}mR^2\frac{a_{\mathrm{Cu}}}{R} = k_{\mathrm{Cu}}mR^2\frac{v^2}{2x_{\mathrm{Cu}}R},$$

amiből

$$d = \frac{(1+k_{\mathrm{Cu}})v^2}{2gx_{\mathrm{Cu}}}R.$$

A kétféleképpen kifejezett d távolság összevetéséből a rézcső útja a vízszintes felületen:

$$x_{\mathrm{Cu}} = \frac{2(1+k_{\mathrm{Cu}})}{3}\,x_{\mathrm{Al}} = 2{,}46\ \mathrm{m}.$$

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy ahányszor magasabbról indítottuk a rézcsövet, annyiszor messzebb áll meg a vízszintes felületen. Ezt úgy is interpretálhatjuk, hogy a teljes mechanikai energia a kezdeti magassággal arányos, és a mechanikai energia „hővé alakulása” (disszipációja) pedig a vízszintes szakaszon megtett úttal arányos. Azonban ez az energiadisszipáció nem írható fel a súrlódási erő és a megtett út szorzataként, hiszen ha így írnánk fel, akkor mindkét testre ugyanakkora súrlódási erőt kapnánk, ami nyilvánvalóan hamis következtetés lenne. Az energia nem a szokásos csúszási súrlódás formájában disszipálódik (gyakorlatilag tiszta gördülés történik, lényegében tapadó súrlódás lép fel), hanem a testek alatti felület nem tökéletesen rugalmas benyomódása okozza a mechanikai energiaveszteséget. Feltehetjük, hogy mindkét test esetén ugyanolyan széles és ugyanolyan mély a benyomódás, ezért tapasztalhatjuk azt, hogy a disszipáció a nyom hosszával arányos.

2. Érdemes észrevennünk azt is, hogy a felületre merőleges nyomóerő forgatónyomatéka lassítja a testek forgását, míg a súrlódási erő gyorsítja a forgást. A súrlódási erő kicsi, de az erőkarja (R) nagy (a benyomódás mértéke elhanyagolható a sugárhoz képest), míg a nyomóerő jelentős, de az erőkarja (d) kicsi. Az alumíniumhenger esetén a súrlódási erő a nyomóerőnek (mg-nek) hozzávetőlegesen $1/40$ része, a rézcsőnél mindössze $1/50$ része. A d távolság a sugárnak nagyjából $3/80$ része, tehát a nyomóerő forgatónyomatéka az alumíniumhenger esetén másfélszer akkora, mint a súrlódási erő nyomatéka (a rézcsőnél ez az arány másfélnél valamivel nagyobb). Ez azt mutatja, hogy a kétféle nyomaték összemérhető.

3. A számításokban a képletek leegyszerűsítése érdekében a gyorsulások és a szöggyorsulások abszolút értékével számoltunk, miközben természetesen nyilvánvaló, hogy a vízszintes felületen a testek gyorsulása is, szöggyorsulása is negatív.

4. Az eredményhirdetésen az első feladat megoldásának ismertetése után a hallgatóság egy valódi kísérletről készült videófelvételen láthatta, hogy egy tömör alumíniumhenger és egy ugyanolyan tömegű, illetve ugyanolyan külső méretű rézcső a példa megoldásának megfelelően nem egyforma úton lassul le vízszintes felületen, ha azonos kezdősebességgel, tisztán gördülve, egyszerre indítjuk őket. A puha felületet egy asztallapra leterített abrosz szolgáltatta, az azonos sebességű, egyidejű indítás egy hosszú vonalzóval történt.