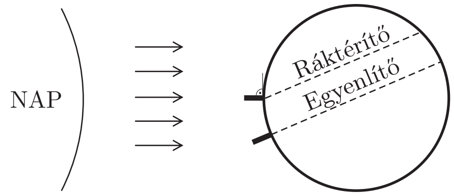
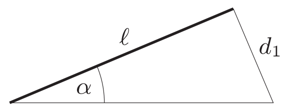
**I. megoldás.** *a*) Június 21-én (a nyári napforduló napján) a Nap a Ráktérítőn délben éppen merőlegesen süt, az Egyenlítőn tehát ezen a napon $\alpha = 23{,}5^\circ$-os szöget zárnak be a függőlegessel a napsugarak (*1. ábra*). Az $\ell = 1$ m hosszú bot árnyéka ilyenkor $d_1 = \ell \operatorname{tg} \alpha = 0{,}435$ m hosszúságú (lásd a *2. ábrát*).



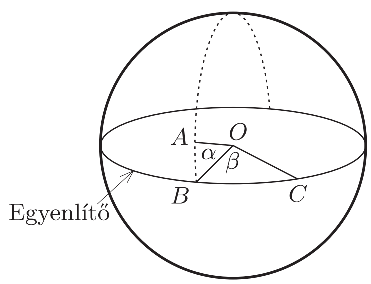
1.ábra



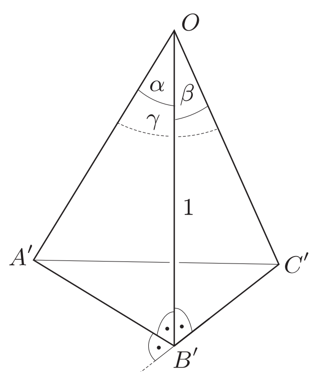
2.ábra

*b*) A Föld 24 óra alatt $360^\circ$-ot, 2 óra alatt tehát $\beta = 30^\circ$-ot fordul el a tengelye körül. Legyen $O$ a Föld középpontja, $A$ egy olyan pont, ahol a Nap $90^\circ$-os szögben delel, $B$ az Egyenlítő olyan pontja, amely $A$-val azonos délkörön helyezkedik el, $C$ pedig az Egyenlítő ugyanezen pontjának 2 órával későbbi helye (*3. ábra*).

Tudjuk, hogy $\alpha = AOB\sphericalangle = 23{,}5^\circ$, továbbá azt, hogy az $AOB$ és $BOC$ síkok merőlegesek egymásra. Ha ismernénk a $\gamma = AOC$ szöget, vagyis hogy milyen szöget zárnak be a napsugarak a $C$ helyzetben levő függőleges bottal, akkor a bot árnyékának hosszát a $d_2 = \ell \operatorname{tg} \gamma$ összefüggésből könnyen ki tudnánk számítani.



3.ábra



4.ábra

Vegyünk fel egy $A'B'C'O$ tetraédert (*4. ábra*), amelyre

$$A'OB'\sphericalangle = \alpha, \qquad B'OC'\sphericalangle = \beta,$$

továbbá

$$A'B'C'\sphericalangle = A'B'O\sphericalangle = C'B'O\sphericalangle = 90^\circ.$$

Legyen $OB' = 1$, ekkor $B'C' = \operatorname{tg}\beta$, $A'B' = \operatorname{tg}\alpha$, és Pitagorasz tétele szerint

$$OC' = \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta + 1}, \qquad OA' = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}, \qquad A'C' = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta}.$$

Könnyen belátható, hogy $A'OC'\sphericalangle = AOC\sphericalangle = \gamma$ a keresett szög.

Írjuk fel az $A'OC'$ háromszögre a koszinusztételt:

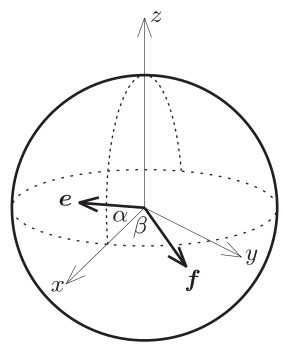
$$(A'C')^2 = (OA')^2 + (OC')^2 - 2\,OA' \cdot OC' \cdot \cos\gamma,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{(OA')^2+(OC')^2-(A'C')^2}{2\,OA'\cdot OC'} = \\ &= \frac{\left(\operatorname{tg}^2\alpha+1\right)+\left(\operatorname{tg}^2\beta+1\right)-\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+1}} = \\ &= \cos\alpha\cdot\cos\beta = 0{,}794; \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 37{,}4^\circ.\end{aligned}$$

A bot árnyékának hossza tehát a kérdéses időpontban: $d_2=\ell\,\operatorname{tg}\gamma=0{,}76$ m.

**II. megoldás.** Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek origója a Föld középpontja, $x-y$ síkja pedig az Egyenlítő síkjával esik egybe, és az $x$ tengely a bot delelési helyzete felé mutat (*5. ábra*).



5.ábra

Ebben a koordináta-rendszerben a Nap felé mutató egységvektor $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,0,\sin\alpha)$, a delelési helyzethez képest $\beta$ szöggel elfordult bot felé mutató egységvektor pedig $\boldsymbol{f}=(\cos\beta,\sin\beta,0)$ módon adható meg. ($\alpha=23{,}5^\circ$ az Egyenlítő síkjának a földpálya síkjával bezárt szöge.)

Az $\boldsymbol{e}$ és $\boldsymbol{f}$ vektorok által bezárt $\gamma$ szög a napsugarak és a bot szöge, melynek koszinusza a két vektor skalárszorzatával egyenlő:

$$\cos\gamma=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{f}=e_xf_x+e_yf_y+e_zf_z=\cos\alpha\,\cos\beta.$$

Az $\ell=1$ méteres bot árnyékának hossza:

$$d=\ell\cdot\operatorname{tg}\gamma=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}=\ell\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha\,\cos^2\beta}-1},$$

ami

$$d=\ell\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\alpha}}$$

alakban is felírható.

*a*) Délben $\beta_1=0$, ekkor $\gamma=\gamma_1=\alpha$, az árnyék hossza tehát

$$d_1=\ell\cdot\operatorname{tg}\alpha=43{,}5\ \text{cm}.$$

*b*) A delelés után 2 órával $\beta_2=30^\circ$, ekkor $\gamma=\gamma_2=37{,}4^\circ$, és a bot árnyéka $d_2=76{,}4$ cm hosszú.