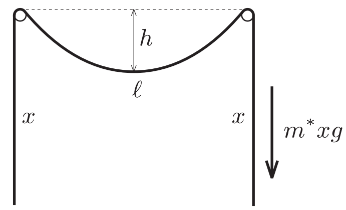
I. megoldás. Jelöljük a kötél egységnyi hosszúságú darabjának tömegét m^*-gal, a függőlegesen lelógó egy-egy rész hosszát pedig x-szel (*1. ábra*)!

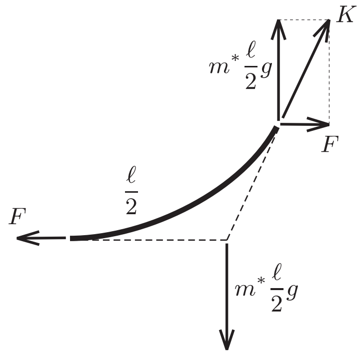
Vizsgáljuk a belógó kötél egyik felének egyensúlyát (*2. ábra*)! Ennek a résznek a súlya $m^* g\ell/2$. A kötelet feszítő erő vízszintes F komponense a kötél minden pontjában ugyanakkora, hiszen a nehézségi erő függőleges. A függőleges komponens helyről helyre változik, a kötél közepénél nulla, a szegnél pedig a belógó rész felének súlya: $m^* \frac{\ell}{2} g$.



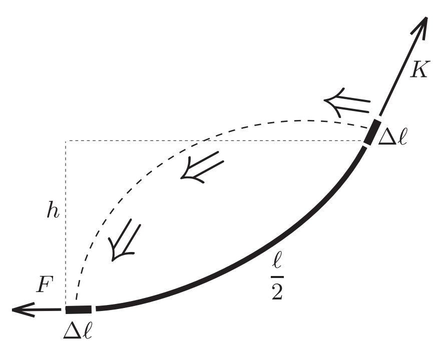
1. ábra

A szegnél ható erő nagysága, ami a lelógó függőleges kötél súlyával egyenlő, Pitagorasz tétele alapján számítható:

$$K = \sqrt{\left(m^* \frac{\ell}{2} g\right)^2 + F^2} = m^* x g. \tag{1}$$



2. ábra



3. ábra

Képzeljük el, hogy a kötelet a belógó rész közepénél elvágjuk, majd egy kicsiny, $\Delta\ell$ hosszúságú darabbal nagyon lassan feljebb húzzuk, végül pedig a szegnél a $\Delta\ell$ hosszúságú darabot kivágjuk és visszavisszük az elvágás helyére, majd ott visszatoldjuk a kötélbe (*3. ábra*). Mivel ilymódon az eredeti állapothoz jutunk vissza, az összes munkavégzés nulla kell legyen: $W = K\Delta\ell - F\Delta\ell - m^*\Delta\ell g h = 0$, vagyis

$$K = F + m^* g h. \tag{2}$$

(1) és (2) összevetéséből a függőlegesen lelógó részek hosszára

$$x = \frac{\ell^2}{8h} + \frac{h}{2},$$

a kötél keresett teljes hosszára pedig

$$L = 2x + \ell = \frac{\ell^2}{4h} + h + \ell$$

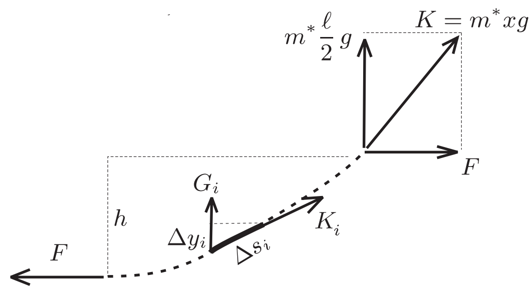
adódik, amit

$$L = \frac{(2h+\ell)^2}{4h}$$

alakban is fel lehet írni.

II. megoldás. Osszuk fel a kötelet (gondolatban) kicsiny, Δs_i hosszúságú darabkákra ($i = 1, 2, \ldots, N$), és jelöljük a kis darabkák végpontjai közötti magasságkülönbséget Δy_i-vel (*4. ábra*). Ha G_i az i-edik kis darabka egyik végpontjánál ható függőleges irányú erő, F pedig az i-től független vízszintes erőkomponens, akkor az eredő K_i nagyságára fennáll:

(3) $$G_i^2 + F^2 = K_i^2.$$



4. ábra

Fennáll továbbá, hogy
$$G_{i+1} - G_i \equiv \Delta G_i = m^* \Delta s_i g,$$
ahol m^* a kötél egységnyi hosszának tömege, valamint a köteldarabkákra ható erő és az érintő megegyező irányából:

(4) $$\Delta y_i = \Delta s_i \frac{G_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \frac{G_i \Delta G_i}{K_i} = \frac{1}{2m^* g} \frac{\Delta \left(G_i^2\right)}{K_i}.$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy bármilyen f mennyiség négyzetének kicsiny megváltozása:

(5) $$\Delta f^2 \equiv (f + \Delta f)^2 - f^2 = 2f\Delta f + (\Delta f)^2 \approx 2f\Delta f,$$

ha $\Delta f \ll f$.

Képezzük a (3) egyenlet mindkét oldalának kicsiny megváltozását, vagyis hasonlítsuk össze az $(i+1)$-edik és az i-edik egyenletet, és alkalmazzuk az (5) azonosságot! Mivel F i-től független állandó,

$$G_i \Delta G_i = K_i \Delta K_i,$$

azaz (4) így írható:
$$\Delta y_i = \frac{1}{m^* g} \frac{G_i \Delta G_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \frac{K_i \Delta K_i}{K_i} = \frac{1}{m^* g} \Delta K_i.$$

Összegezzük a fenti egyenletben szereplő Δy_i mennyiségeket a kötél belógó részének felére. Mivel $\sum \Delta y = h$, a 4. ábra jelöléseivel
$$h = \frac{1}{m^* g} (K - F).$$
Ez éppen az I. megoldás (2) egyenlete, amelyből (1) felhasználásával a kötél teljes hosszára az

$$L = \frac{(2h + \ell)^2}{4h}$$

eredmény adódik.