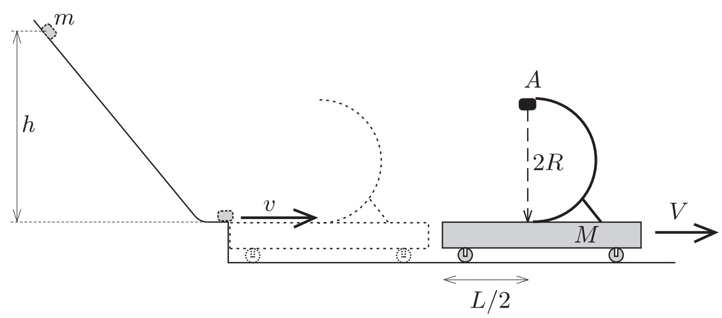
Megoldás. Jelöljük a kis test sebességét a kiskocsira csúszáskor v-vel, a kocsi legnagyobb sebességét pedig V-vel (*1. ábra*)! A súrlódásmentes mozgás miatt érvényes a mechanikai energiamegmaradás törvénye:

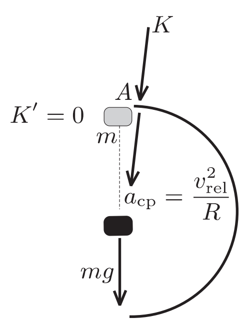
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = \sqrt{2gh}.$$



1. ábra

a) A kis test a hengerpaláston csúszva akkor érhet el az A pontig, ha a rá ható K kényszererő a mozgása során mindvégig a felülethez szorítja, tehát sehol nem válik negatívvá. Ennek a feltételnek a legfelső pontban is teljesülnie kell (belátható, hogy akkor a mozgás korábbi szakaszán is teljesül). Írjuk fel a Newton-egyenletet a kocsihoz rögzített koordináta-rendszerben akkor, amikor a kis test már majdnem az A ponthoz érkezik.

Megjegyzés. A kiskocsi ebben a pillanatban már nem gyorsul, hiszen a kényszererőnek nincs vízszintes komponense, emiatt a kocsi vonatkoztatási rendszere inerciarendszer, a Newton-egyenlet tehát eredeti formájában alkalmazható. Ha a kis test mozgását már korábban is a kiskocsi koordináta-rendszeréből akarnánk leírni, ezt csak ún. tehetetlenségi erők felhasználásával tehetnénk meg.



2. ábra

Ha a kis testnek a kocsihoz viszonyított (relatív) sebességét v_{rel}-lel jelöljük, a mozgásegyenlet (*2. ábra*):

$$mg + K = m\frac{v_{\mathrm{rel}}^2}{R}, \qquad \text{azaz} \qquad K = m\left(\frac{v_{\mathrm{rel}}^2}{R} - g\right) \geq 0.$$

Tudjuk még, hogy a kis test az A pontban éppen megáll a talajhoz képest, emiatt a relatív sebesség éppen a kiskocsi sebességével egyezik meg: $v_{\mathrm{rel}} = V$. A kényszererőre vonatkozó feltétel szerint

$$V \geq \sqrt{gR}.$$

Mivel a szabadon eső kis test $2R$ magasságból $t = \sqrt{4R/g}$ idő alatt ér le a kocsira, s ezalatt a kocsi $Vt = L/2$ utat tesz meg, a kocsi hosszára az

$$L = 2Vt \geq 2\sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{4R}{g}} = 4R = 2{,}4\ \mathrm{m}$$

feltételt kapjuk.

b) A kocsi M tömegére és az indítás h magasságára a lendületmegmaradás és az energiamegmaradás törvényéből kaphatunk megszorításokat. Mivel a kiskocsiból és a már rajta levő kis testből álló rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, a lendület vízszintes komponense állandó marad:

$$mv = MV, \qquad \text{vagyis} \qquad v = \frac{M}{m}V.$$

Másrészt a mechanikai energia megmaradási törvényét is alkalmazhatjuk a kis testnek a kocsira érkezése és az A pontba jutása között:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MV^2 + mg \cdot 2R,$$

ahonnan a lendületmegmaradásból kapott összefüggést felhasználva

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m}V\right)^2 = \frac{1}{2}MV^2 + mg \cdot 2R,$$

vagyis

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \left(\frac{M}{m}\right) - \frac{4gR}{V^2} = 0.$$

Ez egy másodfokú egyenlet a tömegarányra, melynek konstans tagja a kényszererőre vonatkozó feltétel miatt a

$$0 < \frac{4gR}{V^2} \le 4$$

határok közé esik. Innen

$$1 < \frac{M}{m} \le \frac{1+\sqrt{17}}{2} = 2{,}56,$$

vagyis a kiskocsi tömege

$$m = 2\ \text{kg} < M \le 2{,}56\, m = 5{,}12\ \text{kg}.$$

c) A lejtő magassága

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{M}{m}\right)^2.$$

Határesetben, amikor a kényszererő az A pontban nullára csökken,

$$V^2 = gR \qquad \text{és} \qquad \frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \approx 2{,}56,$$

tehát

$$h = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \frac{R}{2} \approx 2,0\ \text{m}.$$

Általános esetben (amikor a kényszererő az A pont közelében még határozottan pozitív) a $h > 2$ m feltételnek kell teljesülnie.

Megjegyzések. 1. A kiskocsi tömegére adódó alsó és felső korlát szemléletes jelentése a következő: Ha a kocsi tömege nagyon nagy lenne, akkor a kis test (mint egy merev falról) „visszapattanna” róla, nem csökkenhetne nullára a sebessége. A másik véglet: ha a kocsi tömege kisebb lenne, mint a lecsúszó testé, akkor a kiskocsi nem tudná lefékezni a kis testet, hanem a „puha ütközés” után mindketten jobbra mozognának.

2. Sok versenyző úgy gondolta, hogy ha a kis test sebessége az A pontban nullára csökken, akkor ugyanitt a K kényszererőnek is nullához kell tartania. Ez azonban nem igaz: a kényszererő csak a hengerpalástot elhagyva válik $K' = 0$ értékűvé (lásd a 2. ábrát), közvetlenül előtte véges nagyságú, elvben akármilyen nagy lehet. Newton mozgástörvényei csak a sebesség ugrásszerű változását tiltják, hiszen ekkor a gyorsulás és vele együtt a testre ható erő „végtelen nagy” lenne; a gyorsulás (és vele az erőhatás) hirtelen megváltozását semmi nem korlátozza. Dávid és Góliát harcában pl. a parittyában levő kőre ható kényszererő a gyors forgatás során nagyon nagy, majd a parittya elengedése után hirtelen (elvben tetszőlegesen rövid idő alatt) nullára csökkenhet.