Megoldás. *a*) Az űrhajó a pályamódosítás után olyan ellipszis alakú pályán mozog, melynek egyik fókuszpontja a Föld középpontja. (Ez Kepler I. törvényének kiterjesztése az űreszköz mozgására.)

Jelölések: M a Föld tömege, R a Föld sugara, m az űrhajó tömege, f a Newton-féle gravitációs állandó, v_0 pedig az űrhajó sebessége a pályamódosítás előtt.

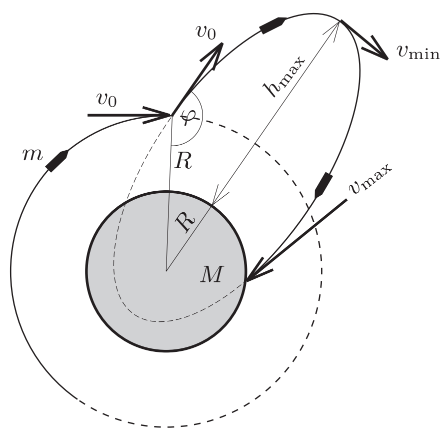
Az űrhajó eredetileg körmozgást végzett, így teljesül a körmozgás dinamikai feltétele:

$$f\frac{Mm}{(2R)^2}=\frac{mv_0^2}{2R},$$

ahonnan

$$v_0=\sqrt{\frac{fM}{2R}}\approx 5{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Az űrhajó az ellipszis nagytengelyének távolabbi végpontjánál, a Föld felszínétől $h_{\max}$ távolságban lesz legmesszebb a Földtől, itt a sebessége (nagyságát jelöljük $v_{\min}$-nel) merőleges a Föld középpontjából induló helyvektorra.



Alkalmazhatjuk Kepler II. törvényét (a Föld középpontjára vonatkoztatott perdületmegmaradási törvényt):

$$mv_0\cdot 2R\sin\varphi=mv_{\min}\cdot(R+h_{\max})\sin 90^\circ,$$

vagyis

$$v_{\min}=v_0\frac{R}{R+h_{\max}}.$$

Az energiamegmaradás törvénye is érvényes:

$$-f\frac{Mm}{2R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-f\frac{Mm}{R+h_{\max}}+\frac{1}{2}mv_{\min}^2.$$

Behelyettesítve v_0-t és $v_{\min}$ korábban kiszámított kifejezését:

$$-f\frac{Mm}{2R}+\frac{1}{2}mf\frac{M}{2R}=-f\frac{Mm}{(R+h_{\max})}+\frac{m}{2}\frac{fM}{2R}\left(\frac{R}{R+h_{\max}}\right)^2,$$

ahonnan algebrai átalakítások után egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{1}{2R}(R+h_{\max})^2-2(R+h_{\max})+\frac{R}{2}=0,$$

melynek számunkra érdekes (a földtávoli pontnak megfelelő) megoldása

$$h_{\max}=\left(1+\sqrt{3}\right)R\approx 17\,400\ \text{km}.$$

Ekkora tehát az űrhajó maximális távolsága a Föld felszínétől.

b) A pályamódosítás és a becsapódás pillanata közötti mozgásra is alkalmazhatjuk az energiamegmaradás törvényét. A becsapódás sebességének nagyságát $v_{\max}$-szal jelölve:

$$-f\frac{Mm}{2R}+\frac{1}{2}mv_0^2=-f\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}mv_{\max}^2,$$

$$-f\frac{Mm}{2R}+\frac{1}{2}\,\frac{mfM}{2R}=-f\frac{Mm}{R}+\frac{1}{2}mv_{\max}^2,$$

$$v_{\max}^2=\frac{3fM}{2R},$$

tehát a keresett becsapódási sebesség:

$$v_{\mathrm{max}} = \sqrt{3}\, v_0 \approx 9{,}7\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés. A feladatban leírt pályamódosítás végrehajtásához az űrhajó teljes tömegével összemérhető mennyiségű hajtóanyagra lenne szükség, emiatt az a gyakorlatban megvalósíthatatlan.